

# Konstruktive aspekter af matematikken

PhD-stipendiat Klaus Frovin Jørgensen  
Afdeling for Filosofi og Videnskabsteori  
Roskilde Universitet

Juni 2002

Mod slutningen af 1880'erne beviste David Hilbert det for tiden vigtigste uløste problem inden for invariantteori. Hilberts resultat er siden blevet kendt under *Hilberts Basis Sætning*: Hvis  $k$  er et legeme, så er ethvert ideal i polynomiumsringen  $k[X_1, \dots, X_n]$  endeligt frembragt. Problemet havde været åbent i længere tid, men Paul Gordan – den på det tidspunkt førende inden for området – havde løst problemet for et specialtilfælde og havde formodet det korrekt i det generelle. Gordans bevis for specialtilfældet var algebraisk og kompliceret, men konstruktivt. Hilberts bevis for det generelle var kort og elegant, men ikke-konstruktivt og repræsenterede dermed en ny måde at gribe problemerne an inden for området. Det er velkendt, at Gordan var mere end kritisk overfor Hilberts bevis og udtalte, at det var teologi snarere end matematik. Sandt er det også, at Hilbert beviste, at givet et ideal er det *ikke* muligt, at en endelig basis *ikke* eksisterer, men ud fra beviset kunne ikke engang en øvre grænse for antallet af basiselementer angives. Hilbert stillede sig til en vis grad forstående overfor kritikken af det ikke-konstruktive eksistensbevis og arbejdede intenst de næste år med invariantteori, hvorved et mere generelt og abstrakt syn på problemerne kom for dagen. Senere forlod Hilbert invariantteorien til fordel for teorien om algebraiske tallegemer, hvor han også flittigt brugte den moderne matematiks generelle metoder og abstrakte definitioner.

Således var Hilbert allerede i begyndelsen af sin karriere en moderne og progressiv matematiker, som ikke veg tilbage for ikke-konstruktive eksistensbeviser. Gennem ham blev tidligere distinkte discipliner kædet sammen, og moderne matematik er uløseligt forbundet med hans navn. Megen af hans succes var baseret på abstrakte definitioner og ikke-konstruktive metoder.

Så da den nye matematiks metoder blev kritiseret af eksempelvis Gordan og senere af matematikere som L.E.J. Brouwer, E. Borel, H. Weyl, H. Lebesgue, var det ikke andet end naturligt, at det var Hilbert, som tog kritikken alvorligt og forsøgte at give et forsvar for den nye matematik. Dertil udviklede han og hans medarbejdere i Göttingen det bevisteoretiske program.

Hilberts tanke med programmet var én gang for alle at fordrive de kritiske røster, der stillede sig tvivlende over for gyldigheden af den abstrakte matematik. Når det var gjort, kunne matematikerne stoppe med at bekymre sig om spørgsmål vedrørende matematikkens grundlag og fortsætte med at udvikle

den nye matematik. Det centrale i Hilberts program var at give et finitistisk (dvs. strengt konstruktivt) bevis for, at de abstrakte, ideale elementer i matematikken ikke kan bevise sætninger af denne strenge konstruktivistiske karakter, som ikke i forvejen principielt kan bevises uden brug af ideale elementer. Teknisk set kunne et sådant bevis gives ved at give et finitistisk bevis for konsistensen af matematikken, hvorfor Hilbert koncentrerede sig om dette konsistensbevis.

Det er velkendt, at Hilberts program hverken kunne eller kan gennemføres. Den vigtigste grund hertil er nok Kurt Gödels to ufuldstændighedssætninger fra 1931, som hver især rammer programmet. En af konklusionerne ovenpå Gödels resultat er, at det som Hilbert udpegede som en konstruktiv kerne af matematikken ikke er meget bevendt med hensyn til konsistensbeviset. Et par år senere, i 1933, viste Gödel derimod, at konsistens af Brouwers intuitionistiske aritmetik implicerer konsistens af klassisk aritmetik, og det blev derved klart, at Hilberts forståelse konstruktivisme var langt mere begrænset end den intuitionistiske: Hilbert kunne som nævnt ikke bevise sådanne konsistensspørgsmål finitistisk. Det følger heraf – hvilket Gödel [2] også senere påpegede – at der findes flere forskellige lag og forståelser af konstruktivisme. Et mål med denne lille tekst er at anskueliggøre og eksemplificere dette problem.

Det paradoksale ved Hilberts bevisteori er, at den netop blev udviklet til at eliminere sådanne spørgsmål vedrørende matematikkens grundlag, men at den i dag kan bruges præcis til at undersøge og påvise kompleksiteten og dybden i en forståelse af, hvilke elementer af matematikken, der er konstruktive.

Intuitionistisk logik er et bud på, hvad man kan forstå ved en konstruktiv logik. Det er centralt for den intuitionistiske filosofi, at sandhed skal være noget, som er tilgængeligt for os som mennesker. Eksempelvis giver det ikke intuitionistisk mening at hævde, at lighed som en total funktion  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \{S, F\}$  er konstruktiv. Lad 0 som et endeligt tal og 0.0000... som et uafsluttet endnu ikke bestemt tal være givet. Da  $f$  er konstruktiv, skal den i endelig tid beslutte sig for, om de to tal er lige. Hvis  $f$  siger, at de er lige, dvs.  $f(0, 0.00\dots) = S$ , så kunne det jo være, at det næste tal i følgen var 1 og omvendt, hvis  $f(0, 0.00\dots) = F$ , så kunne det jo være, at resten af følgen rent faktisk var nuller. Således er det svært at acceptere lighed på de reelle tal som konstruktiv. Bemærk, at eksemplet egentlig eksemplificerer det generelle problem/faktum, at en funktion fra et sammenhængende rum til et diskret ikke kan være kontinuert uden at være konstant, og at dette sætter fingeren på et vigtigt element vedrørende konstruktive funktioner: Hvis en funktion er beregnbar, så er den kontinuert.

Begrebet om sandhed redefineres derfor i intuitionismen, således at et matematisk udsagn er sandt, hviss det kan bevises (før eller senere). Dette giver anledning til en ny forståelse af de logiske symboler. Således er sandhedsværdien dvs. forståelsen af  $A \Rightarrow B$  ikke givet ud fra den klassiske sandhedstabel for  $\Rightarrow$  samt sandhedsværdierne for  $A$  og  $B$ . Snarere kan vi hævde  $A \Rightarrow B$ , hvis vi for ethvert bevis af  $A$  kan producere et bevis af  $B$ . Ligeledes kan vi hævde  $A \& B$ , netop hvis har et bevis af  $A$  og et bevis af  $B$ . Med denne fortolkning af de logiske symboler kan vi gå den klassiske prædikatslogik igennem og se hvilke aksiomer, vi mener altid at kunne hævde. Eksempelvis er bevisfortolkningen af  $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$  selvindlysende nemlig: Givet et bevis af  $A$  og et

bevis af  $B$  skal vi kunne producere et bevis af  $A$ . Præcis et aksiom falder dog ud:  $A \vee \neg A$ . Det er ingenlunde klart, at givet et hvilket som helst udsagn, så kan vi bevise eller modbevise det; tag eksempelvis  $A$  som ”der findes uendeligt mange tvillingepriamtal”. Men for de andre aksiomer er bevisfortolkningen sund. Således er intuitionistisk logik som klassisk logik blot uden  $A \vee \neg A$ . Nu er det ikke selvindlysende udfra ovenstående uformelle overvejelser omkring meningen af de logiske symboler, at matematiske teorier baseret på intuitionistisk logik er konstruktive. Men bevisteoretiske undersøgelser baseret på eksempelvis Kleenes realiserbarheds-fortolkning [5] har i anden halvdel af sidste århundrede vist, at dette er tilfældet for mange af de mere simple teorier baseret på intuitionistisk logik. I hvert fald i den forstand at de besidder eksistensegenskaben (til ethvert bevist eksistensudsagn findes der et objekt i teorien, som vidner udsagnet) og disjunktionsegenskaben (enhver bevist disjunktion kan afgøres).

Men der er flere problemer ved at forstå intuitionistisk logik som en *global* karakterisering af konstruktiv logik. Lad os betegne Zermelo-Fraenkels mængdelære baseret på intuitionistisk logik ved IZF. Det kan vises [1], at IZF har eksistensegenskaben for tal og disjunktionsegenskaben generelt. Ikke desto mindre er IZF næppe en konstruktiv teori, da eksempelvis potensmængdeaksiomet kan benyttes ubegrænset. Dette viser, at blot fordi man benytter intuitionistisk logik, er man ikke garanteret en konstruktiv teori. Så på et overordnet plan er problemet, at intuitionistisk logik lover for meget. På et mere lokalt plan er problemet, at principper som *generelt* er ikke-konstruktive, men som lokalt set kan være fuldt konstruktive, ikke accepteres af intuitionismen. Et par eksempler vil illustrere dette.

Antag, at  $A_0(x)$  er afgørbar for alle  $x$ . Givet et sådant  $A_0$  siger Markovs princip, at *hvis* det umuligt kan være tilfældet, at for alle  $x$  gælder  $A_0(x)$  ikke, så eksisterer der et  $x$ , sådan at  $A_0(x)$ ; dvs.

$$\neg\neg\exists x A_0(x) \Rightarrow \exists x A_0(x)$$

Princippet er ikke intuitionistisk gyldigt, da det ikke er åbenlyst, hvordan vi fra et bevis af præmissen finder et konkret objekt, som vidner konklusionen. I tilfældet med de naturlige tal er det dog klart: Vi prøver simpelthen tallene af et efter et – præmissen sikrer, at vi før eller siden finder et  $m$  sådan at  $A(m)$ . Men hvis kvantoren ikke løber over  $\mathbf{N}$  men over et domæne f.eks.  $\mathbf{R}$ , hvor ordningen ikke er konstruktiv, så er det ikke åbenlyst, hvordan vi skal tilfredsstille konklusionen givet præmissen. Derfor er det også problematisk at antage Markovs princip som et *globalt* konstruktivt princip. Ikke desto mindre findes der mere lokale sammenhænge, hvor det konstruktivt giver god mening at acceptere Markovs princip, da det i denne konkrete sammenhæng har en konstruktiv fortolkning [3]. Således kan Markovs princip betragtes som fuldt konstruktivt over intuitionistisk aritmetik generaliseret til alle endelige typer. Dette er matematisk en interessant teori, da den sammen med Königs Lemma er kraftig nok til at formalisere vigtige dele af analysen [6], hvorved nye matematiske resultater kan bevises inden for eksempelvis approksimationsteori og fikspunktsteori såsom dem, Ulrich Kohlenbach har opnået og omtalt andetsteds i

dette nummer af Matilde.

Ekstensionalitet er et andet element af matematikken, som ikke umiddelbart er konstruktivt. Har vi reelle tal givet som Cauchyfølger af rationelle tal, kan vi ekstensionelt reducere lighed på  $\mathbf{R}$  til lighed på  $\mathbf{Q}$ . Således *defineres* ekstensionel lighed nedefra og op, hvilket kan løftes til reelle funktioner, til operationer på reelle funktioner osv. Dette fortsættes op i højere og højere typer. Igen er det generelt ikke tilfældet, at funktioner og operationer er konstruktive, hvis vi forlanger, at de skal respektere dette definerede begreb om lighed. Ikke desto mindre kan man lokalt set inden for endelig typeteori give en konstruktiv fortolkning af fuld ekstensionalitet op igennem hele hierarkiet. Dette gøres igen ved en version af Kleenes begreb om realiserbarhed.

Omvendt kan man vise, at netop Markovs princip *sammen* med fuld ekstensionalitet ikke kan betragtes som konstruktivt. Dette kan vises ved at sammenkæde forskellige bevisteoretiske metoder, se [4]. Det filosofisk interessante er, at forskellige principper – som generelt set er ikke-konstruktive og ikke-intuitionistiske – lokalt set og hver for sig kan gives konstruktive fortolkninger, men at sammenkædningen af dem er en yderst vanskelig og følsom ting.

Ovenstående skulle gerne have antydnet, at konstruktivisme, og hvad en konstruktiv logik er, endnu ikke er fuldt ud forstået. Der findes, som Gödel påpegede det, mange forskellige lag og udgaver af konstruktivisme, og forholdet mellem dem er ikke åbenlyst.

## Litteratur

- [1] Friedman, H. (1973). Some applications of Kleene's method for intuitionistic systems, I *Cambridge Summer School in Mathematical Logic 1971*, pp. 113-170, Springer LNM 337.
- [2] Gödel, K. (1933). The present situation in the foundations of mathematics, i Gödel, K. (1996) *Collected Works* Vol. III, OUP, New York.
- [3] Gödel, K. (1958). Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes, *Dialectica* **12**: 280-287.
- [4] Jørgensen, K.F. (2001). *Finite Type Arithmetic: Computable Existence Analysed by Modified Realisability and Functional Interpretation*, IMFUFA-tekst nr. 401, Roskilde.
- [5] Kleene, S.C. (1945). On the interpretation of intuitionistic number theory, *JSL* **10**: 109-124.
- [6] Simpson, S.G. (1999). *Subsystems of Second Order Arithmetic*, Springer, Berlin.