IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, postboks 260, DK-4000 Roskilde, Danmark

Bevisteori – Eksemplificeret ved Gentzens bevis for konsistensen af teorien om de naturlige tal

Projektrapport udarbejdet af Gitte Andersen, Lise Mariane Jeppesen, Klaus Frovin Jørgensen og Ivar Peter Zeck

Vejledere: Bernhelm Booß-Bavnbek og Stig Andur Pedersen

IMFUFA tekst nr. 326/96 89 sider ISSN 0106-6242

Abstract

Denne rapport tager udgangspunkt i **Hilberts program**, der blev fremsat i 1925 som reaktion på den matematiske grundlagskrise omkring år 1900. Programmet skulle sikre matematikkens grundlag en gang for alle gennem et absolut konsistensbevis for hele matematikken. Til formålet udviklede Hilbert den formelle metode **bevisteorien**, der skulle formalisere matematikken, så der kunne gives et konsistensbevis udelukkende med metoder, som selv intuitionister ikke kunne afvise. Kurt Gödel fremsatte i 1931 sine **ufuldstændighedssætninger**, der kuldsejlede Hilberts program og efterlod bevisteorien tilsyneladende magtesløs. Gödel viste, at et formelt system indeholdende mindst en formalisering af teorien for de naturlige tal ikke kunne vise sin egen konsistens. Allerede i 1936 gav **Gerhard Gentzen**, på trods af ufuldstændighedssætningerne, et konsistensbevis for teorien om de naturlige tal. Til at vise konsistensen af det formelle system brugte Gentzen, i overensstemmelse med ufuldstændighedssætningerne, redskaber, der ikke lod sig formalisere i systemet selv. Disse redskaber kunne dog begrundes **konstruktivt** ved en uformel argumentation, hvilket gjorde beviset pålideligt. Man har siden ført id,erne videre og givet konsistensbeviser for store dele af teorien for de reelle tal. I rapporten gennemgås Gentzens konsistensbevis og det behandles, hvordan beviset omgår Gödels ufuldstændighedssætninger.

This report begins with a survey of **Hilbert's programme**, which was introduced in 1925 as a reaction to the crisis regarding the mathematical foundation around the year 1900. The programme was meant to secure the mathematical foundation, once and for all, through an absolute consistency proof of all mathematics. For this purpose, Hilbert developed the formal method of **proof theory**, which was meant to formalize mathematics in order to give a consistency proof exclusively based on methods that even intuitionists could not reject. In 1931 Kurt Gödel introduced his **incompleteness theorems**, which stranded Hilbert's programme and left proof theory apparently powerless. Gödel showed that a formal system containing at least a formalization of the theory of natural numbers, could not prove its own consistency. As early as in 1936 **Gerhard Gentzen**, in spite of the incompleteness theorems, proved the consistency of the theory of natural numbers. In order to prove this, Gentzen only used tools which could not be formalized inside the system itself, in agreement with the incompleteness theorems. Nevertheless these tools could be justified **constructively** by an informal argumentation, which made the proof reliable. Since then these methods have been developed making it possible to give consistency proofs of a large part of the theory of real numbers. In this report we examine Gentzen's consistency proof and discuss how this proof circumvents Gödel's incompleteness theorems.

Indhold

Indledning

I en undersøgelse af matematikken og dens grundlag er teorien om beviser og bevisførelse et naturligt og grundlæggende redskab. De færreste matematikere, uanset filosofisk anskuelse, vil benægte, at en vigtig del af matematikken er at forstå beviser, deres antagelser og konsekvenser. Derfor vil en grundlagsmæssig undersøgelse involvere en metode til at formalisere beviser og undersøge deres strukturer. Dette er **bevisteori** og samtidig emnet for denne rapport.

Bevisteorien er udviklet inden for de sidste 80 år. David Hilbert (1862–1943) var den første, der begyndte at arbejde med bevisteori, og i det følgende vil vi kort beskrive baggrunden for dette.

Matematiske problemer omkring århundredeskiftet

I løbet af det 19. århundrede kom man på flere områder til nogle fundamentalt nye erkendelser om matematikken. Inden for analysen blev infinitesimalregningen videreudviklet og givet et stringent grundlag af Karl Weierstrass (1815–1897), og i slutningen af århundredet grundlagdes mængdelæren af Georg Cantor (1845–1918). Flere hundrede års forgæves forsøg på at bevise Euklids parallel-aksiom resulterede i de ikke-euklidiske geometriers opståen, og man indså, at der ikke fandtes ,n sand geometri. Mange af de erkendelser, man nåede til, havde deres oprindelse i problemer med at håndtere **det uendelige**.

I år 1900 holdt Hilbert et foredrag i Paris på en international kongres for matematikere, hvori han redegjorde for de, ifølge ham, 23 vigtigste og mest påtrængende uløste problemer inden for matematikken.[1] De to problemer, Hilbert nævnte først, er begge matematiske grundlagsproblemer:

- Et bevis for Cantors **kontinuum hypotese**. Ifølge kontinuum hypotesen findes der ikke en (uendelig) mængde indeholdende flere elementer end de naturlige tal og samtidig færre end de reelle.[2]
- Et bevis for **konsistensen** af aksiomerne for de reelle tal.[3]

Imidlertid viste sig også andre problemer, end de af Hilbert nævnte. Bertrand Russell (1872–1970) offentliggjorde i 1903 i tidsskriftet *The Principles of Mathematics* et paradoks inden for Cantors naive mængdelære.[4]

Russells paradoks
Som en illustration af paradokset definerer vi en mængde R som mængden af de mængder, der ikke

[1] Foredraget er udgivet i en engelsk oversættelse [Hilbert, 1902].

[2] Problemet er løst af Kurt Gödel (1906–1978) og Paul J. Cohen (1934–). Gödel viste i 1937, at lægges kontinuum hypotesen til mængdelærens aksiomer, ændres konsistensen af disse ikke. I 1963 viste Cohen, at lægges hypotesens negation til aksiomerne, ændres konsistensen heller ikke. Problemet er således uafgørligt i forhold til mængdelæren [Bell & Machover, 1977; pp. 490].

[3] Dette problem er ikke endeligt afklaret. Ved hjælp af metoder i stil med den brugt i kapitel 4 har man givet konsistensbeviser for store dele af teorien om de reelle tal. Hilbert kaldte iøvrigt aksiomerne for de aritmetiske aksiomer.

[4] [Van Heijenoort, 1967].

er element i sig selv. Hvis mængden R er element i R, er den derfor en mængde, der ikke er element i sig selv. Men hvis R ikke er element i R, er R netop en mængde, der er element i sig selv. Så R er element i sig selv, hvis og kun hvis R ikke er element i sig selv, hvilket er en selvmodsigelse.

Russells paradoks var blot et ud af en række paradokser, der havde deres oprindelse i den naive mængdelære.[5] Paradokserne havde det til fælles, at et objekt besidder en egenskab, og at definitionen af objektet samtidig afhænger af egenskaben.[6]

Paradokserne var, sammen med den generelle udvikling af matematikken i det 19. århundrede (især inden for integralteori og fourieranalyse), medvirkende til, at man ved indgangen til dette århundrede stod med en del problemer omkring matematikken og dens grundlag. Man taler om matematikkens **grundlagskrise**. Som vi vil beskrive i det følgende, blev der givet tre overordnede bud på, hvordan denne krise kunne afhjælpes.[7]

Logicismen

I værket *Principia Mathematica* (1910–1913) formulerede Russell og Alfred N. Whitehead (1861–1947) **logicismens program** — deres bud på en løsning af matematikkens grundlagskrise, så eksempelvis Russells paradoks kunne undgås. Til dette skulle logikken fastslås som værende matematikkens grundlag. Her byggede Russell og Whitehead videre på Gottlob Freges (1848–1925) arbejde med logikken.[8] Russell og Whiteheads tese var, at matematik er en del af logikken. På denne baggrund var logicisternes mål, at de matematiske begreber skulle defineres ved hjælp af logiske begreber, og at alle matematikkens sætninger skulle deduceres alene ud fra logiske aksiomer. De logiske aksiomer i *Principia Mathematica* måtte ikke udtrykke andet end selvindlysende sandheder. Kunne al matematik deduceres ud fra disse aksiomer, kunne den ikke opfattes som andet end sand.

Der var imidlertid alvorlige problemer med programmet. Anlægges en anvendelsesmæssig betragtning var systemet, grundet en vældig kompleksitet, uoverskueligt og disponeret for regnefejl, og dermed ikke særligt brugbart.[9] Som Henri Poincar, (1854–1912) udtrykte det:

»On the contrary, I find nothing in logistic for the discoverer but shackles. It does not help us at all in the direction of conciseness, far from it; and if it requires 27 equations to establish that 1 is a number, how many will it require to demonstrate a real theorem?« [Bell & Machover, 1977; p. v].

Den reelle årsag, til at logicismens program ikke kunne fuldføres, var, at de oprindelige intentioner ikke holdt. Det var nødvendigt at indføre ikke-logiske aksiomer[10] for at opnå en brugbar matematik. Logikken var ikke stærk nok til at kunne omfatte hele matematikken. Russell og Whiteheads program havde dog stor betydning for logikkens udvikling, da det gav den første gennemtænkte formalisering af logikken.

Intuitionismen

En anden vej ud af grundlagskrisen blev givet af intuitionisterne. Intuitionismen blev grundlagt af L. E. J. Brouwer (1881–1966), som ikke var af den opfattelse, at den klassiske logiks regler havde en absolut gyldighed, uafhængigt af den situation de blev anvendt på. Brouwer mente, at de naturlige tal – som det eneste – var givet ved en fundamental intuition som udgangspunkt for al matematik. Matematikken skulle baseres **konstruktivt** på de naturlige tal, dvs. intet matematisk objekt kunne

[5] Af andre paradokser kan nævnes Cantors og Richards paradokser. For en gennemgang se [Kleene, 1952; pp. 36].

[6] En sådan definition kaldes imprædikativ.

[7] Se iøvrigt [Kleene, 1952; pp. 43].

[8] *Die Grundlagen der Arithmetik* fra 1884 og *Die Grundgesetze der Arithmetik* fra 1893 (bind 1) og 1903 (bind 2).

[9] Det har i dag ikke nogen umiddelbar konsekvens for programmet, da computere kan regne systemet efter for regnefejl.

[10] F. eks. aksiomet, der påstår eksistensen af en uendelig mængde.

anses for meningsfuldt eller eksisterende, med mindre det var givet ved en konstruktion ud fra de naturlige tal i et endeligt antal skridt. For at vise objektets eksistens ville det altså ikke være nok at vise, at en antagelse om ikke-eksistens af objektet ville føre til en modstrid.

For intuitionister er mange standardbeviser i klassisk matematik ugyldige. Et eksempel er et af den klassiske logiks principper, det udelukkede tredjes princip, som i sin generelle form udtrykker, at for enhver formel α gælder enten α eller formlens negation $\neg\alpha$. Brouwer accepterede ikke dette princip for uendelige mængder af objekter, da et udsagn om objekter i en sådan mængde (i form af en formel) vil kunne være uafgørligt, dvs. hverken formlen eller dens negation vil gælde.

Bevisteori og metamatematik

Hilbert gav med sin metamatematik, eller **bevisteori** som vi også kalder det, en tredje vej ud af grundlagskrisen. Hilbert mente, at det grundlæggende problem inden for matematikken var uendelighed. For at få klarlagt problemernes omfang – og deres løsning – udviklede han sin bevisteori, som var det nyskabende i det program, han stillede op til sikring af matematikkens grundlag.

I perioden fra ca. 1925 til 1940 var udviklingen af bevisteorien præget af især tre indlæg. Først fremsættelsen af Hilberts program, dernæst arbejder af Kurt Gödel (1906–1978) og sluttelig resultater opnået af ,n af Hilberts egne elever Gerhard Gentzen (1909–1945). Mange betragter bevisteorien som afsluttet efter Gödels arbejde. Efter vores overbevisning er dette ikke tilfældet, hvorfor vi i rapporten fremhæver Gentzens arbejde, der ofte negligeres i grundlagsmæssige diskussioner. Det er primært disse tre indlæg, denne rapport omhandler. I det følgende giver vi derfor en kort introduktion til hvert af de tre indlæg, hvorfor vi først præsenterer nogle af bevisteoriens begreber uformelt.

Bevisteoretiske begreber

Et formelt system består af nogle aksiomer og slutningsregler. Metoder til at studere et sådant system bevisteoretisk er at undersøge **fuldstændighed** og **konsistens** af systemet. Et system er konsistent, hvis og kun hvis det gælder for alle formler α, der kan bevises inden for systemet, at $\neg\alpha$ ikke også kan bevises. Vi siger, at systemet er fuldstændigt, hvis og kun hvis det for alle formler α gælder, at α eller $\neg\alpha$ kan bevises. En formel, der ved endelige slutninger kan udledes fra aksiomerne, siges at være **beviselig**. Således vil en sætning, der viser et systems konsistens, være en sætning, der siger, at højst et vist antal formler er beviselige, mens en sætning om fuldstændighed siger, at mindst et vist antal formler er beviselige.

En vigtig bestanddel af Hilberts program er formaliseringen af systemer. I denne forbindelse er to begreber helt centrale, nemlig **syntaks** og **semantik**. I en syntaktisk behandling af formelle systemer og udtryk fra disse undersøges udelukkende den tilladte kombination af systemets symboler, uafhængig af enhver fortolkning af symbolerne. Bevisteoretiske metoder er dermed syntaktiske. Inden for semantikken behandles derimod den mening symbolerne – og dermed hele udtryk – tillægges i forbindelse med en fortolkning.

Hilberts program

Hilberts klare mål var at forsvare, hvad han kaldte for Cantors paradis, som omfattede brugen af uendelige mængder. Mange af tidens førende matematikere, bla. Brouwer og Hermann Weyl (1885–1955), havde – som følge af paradokserne – afvist hele Cantors mængdelære og dermed den klassiske matematik. Dette var ifølge Hilbert en vanvittig konsekvens at drage, og han følte det som sin helt store opgave at drive Brouwer og de andre radikalister tilbage i folden. Hilberts skarpe reaktion skal ses i lyset af, at mange af de resultater, han havde opnået respekt for i årene før fremsættelsen af sit program, var ikke-konstruktive og dermed ikke acceptable for intuitionisterne.[11] For at forsvare den klassiske matematik og dens grundlag var det helt centralt at få klarlagt og retfærdiggjort

[11] [Smorynski, 1977; p. 822].

matematikkens brug af det uendelige. Her skelnede Hilbert mellem det potentielt uendelige og det aktuelt uendelige.

Det **potentielt uendelige** er ikke det uendelige selv, men betragtes som noget 'gående mod' uendelig. Som sådan forstås det potentielt uendelige som en grænse. Betragtes konstruktionen af følgen af de naturlige tal $1,\ 2,\ 3,\ldots$ som en proces gående mod uendelig, er følgen $1,\ 2,\ 3,\ldots$ ikke et afsluttet objekt — det er en potentiel uendelighed. Opfatter vi derimod mængden af de naturlige tal $\mathbf{N}$ som en afsluttet mængde, taler vi om en **aktuel uendelighed**. Det sidste kan være svært, måske umuligt, at forestille sig; Hilbert mente, at der ikke noget sted i den fysiske verden findes noget, der korresponderer til den aktuelle uendelighed. Ikke desto mindre var det bla. mængden af de naturlige tal, som en afsluttet mængde, Cantor gjorde brug af i sin konstruktion af de transfinite ordinal- og kardinaltal, og det var Hilberts mening at retfærdiggøre denne brug. Dertil opstillede han sit tre-punkts program:

1. Det første trin bestod i at isolere den 'finite' del af matematikken, som indbefatter umiddelbart meningsfulde udsagn og finite bevismetoder. Dette er den uproblematiske del af matematikken. Men Hilbert var ikke eksplicit med, hvad han mente med dette. Dog skrev han, at det i den finite matematik ikke var tilladt at gøre brug af en aktuel uendelighed.[12]

2. Det andet trin bestod i at aksiomatisere og formalisere hele matematikken, indeholdende den aktuelle uendelighed, i ‚t stort system. Dette store system skulle bla. indeholde hele den klassiske logik, teorien for de naturlige tal, udvalgsaksiomet samt de tællelige transfinite ordinaltal. De sætninger, som ikke kunne udtrykkes i den finite del af matematikken, og dermed måtte bygge på en aktuel uendelighed, kaldte Hilbert for **idealsætninger**, der udelukkende skulle behandles syntaktisk – og dermed bevisteoretisk – uafhængigt af enhver semantisk betydning.

3. Det tredje og sidste trin bestod i at give et finitistisk konsistensbevis for hele det store system. Hilbert ville således godtgøre brugen af den aktuelle uendelighed, herunder Cantors paradis, udelukkende med argumenter fra den sikre og indiskutable del af matematikken, nemlig den finite del.

Konsistensbeviset under punkt 3 skulle være et **absolut** konsistensbevis — systemet skulle kunne bevise sin egen konsistens. Den anden type af konsistensbeviser er **relative** beviser, der viser konsistensen af et system under forudsætning af konsistensen af et andet. Hilbert havde i 1899 i *Grundlagen der Geometrie* algebraiseret den Euklidiske geometri, dvs. beskrevet alle egenskaber i geometrien ved aksiomer udtrykt i teorien om de reelle tal. Han gav dermed et relativt konsistensbevis for den Euklidiske geometri, da geometrien ifølge dette resultat er konsistent, hvis teorien om de reelle tal er det. Det havde indtil da ikke været muligt at give et konsistensbevis for teorien om de reelle tal. For at kunne sikre matematikkens grundlag ‚n gang for alle, stræbte Hilbert i sit program derfor mod et absolut konsistensbevis for den klassiske matematik.

Disse tanker, som Hilbert formulerede i slutningen af 1920'erne,[13] lyder jo tiltalende, men i 1931 viste Gödel ‚n gang for alle, at Hilberts program (i sin oprindelige form) ikke kan realiseres.

Gödels ufuldstændighedssætninger

Gödels artikel *šber formal unentscheidbare S„tze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I* fra 1931[14] slog i første omgang benene væk under Hilbert og hans tilhængere. Gödels resultat var kort fortalt, at et **formaliseret** system **S**, der indeholder teorien om de naturlige tal,

[12] Man er i nyere fortolkninger af Hilberts program blevet enige om, at Hilberts finite matematik svarer til det, der kaldes den primitive rekursive aritmetik (PRA). Dette uddybes i appendiks C.

[13] [Hilbert, 1925] og [Hilbert, 1927].

[14] [Gödel, 1931].

ikke med argumenter fra **S** selv kan bevise konsistensen af **S**. Hilberts program var uopnåeligt. Formuleret løst ser Gödels ufuldstændighedssætninger ud som følger:

Første ufuldstændighedssætning.
Lad **S** være et formelt system, som indeholder teorien om de naturlige tal. Da eksisterer der en formel α, der hævder sin egen ubeviselighed, og hvorom det gælder:

- Hvis **S** er konsistent, så kan α ikke bevises i **S**.
- Hvis **S** er konsistent, så kan $\neg\alpha$ ikke bevises i **S**.

Dermed er ethvert system indeholdende de naturlige tal ufuldstændigt.

Anden ufuldstændighedssætning.
Lad **S** være et formelt system indeholdende teorien om de naturlige tal. Man kan i systemet formulere en formel, der udtrykker konsistensen af **S** selv. Lad $Kon_{\mathbf{S}}$ være en sådan formel. Da gælder det, at

$Kon_{\mathbf{S}}$ kan ikke bevises i **S**.

Hvis vi vil føle os helt overbeviste om, at formelle teorier ikke indeholder en modstrid, må vi give et konsistensbevis i en eller anden form. Men den anden ufuldstændighedssætning fortæller os, at et absolut konsistensbevis for hele den klassiske matematik givet inden for de rammer, Hilbert satte op, ikke kan gives, da Hilberts system indeholder teorien om de naturlige tal. For hvis vi ikke kan bevise den absolutte konsistens af idealmatematikken ved brug af idealmatematikken, hvordan skulle vi så kunne bevise den udelukkende ved brug af den finite del? Og kan der overhovedet skabes absolutte konsistensbeviser?

I begyndelsen af 1930'erne gav Gödel udtryk for det synspunkt, at det var muligt, at der fandtes argumenter i forbindelse med konsistensbeviser, der ikke lod sig formalisere, hvorved den anden ufuldstændighedssætning kunne omgås. Gentzen arbejdede videre med denne id,, og i 1936 kunne han præsentere sit konsistensbevis for Peano-aritmetikken, den aritmetik som grundlagdes med Giuseppe Peanos (1858–1932) aksiomer — teorien om de naturlige tal.[15]

Gentzens konsistensbevis for Peano-aritmetikken
Gentzens udgangspunkt var, at der måtte vælges noget uden for systemet, som kunne benyttes til at vise konsistensen. Gentzen valgte at udvide induktionsbegrebet således, at det ikke længere udelukkende var tilknyttet de naturlige tal, men var en del af Cantors transfinite tal, som er en udvidelse af de naturlige tal. Gentzen kunne begrænse sig til de ordinaltal, der kan repræsenteres **konstruktivt**.

Det afgørende og nyskabende ved beviset er ikke, at det viser konsistensen af Peano-aritmetikken, da ingen betvivler dennes konsistens, men selve det, at beviset kan gives, løser op for det umiddelbart definitive ved Gödels anden ufuldstændighedssætning.

Problemformulering

På baggrund af denne viden har vi stillet os selv spørgsmålet:

- Hvordan kan der efter Gödels ufuldstændighedssætninger alligevel tales om finite konsistensbeviser for systemer, som indeholder teorien om de naturlige tal?

Gennem en besvarelse af dette spørgsmål er det rapportens formål at belyse en problemstilling inden for matematikken, vi opfatter som nedprioriteret.

[15]Peanos aksiomer findes i appendiks A.

I projektet har vi valgt ikke at anlægge en udpræget historisk synsvinkel, men derimod en mere teknisk synsvinkel med fokus på resultaterne og metoderne. Vi har primært anvendt engelske oversættelser af de originale kildetekster i et samspil med moderne fortolkninger af disse. Den første type tekster giver en præsentation af forfatterens intentioner, der ofte er præget af dels, at forfatteren har skullet lægge vægt på at begrunde og uddybe sine id,er grundigt, dels af, at begreberne ikke endeligt har taget en klar form, hvorfor originalteksterne til tider kan virke uklare. Vi har set det som en fordel at stifte bekendtskab med originalteksterne, inden de moderne fortolkninger er blevet læst. Vores sekundære kilder har været teknisk klarere end originalteksterne og har kunnet tage en historisk udvikling og begrebsdannelse i betragtning.

Målgruppe og læsevejledning

I arbejdet med dette projekt har det været nødvendigt for gruppen at sætte sig ind i en del af matematikken, der normalt ikke undervises i på RUC, og som kun få matematikere kender til på andet end et overordnet plan. Det har derfor ikke været muligt for os både at vænne os til en ny og abstrakt tankegang og samtidig formå at formidle denne viden på en måde, så vi selv ville kunne have forstået den før projektets start. Vi har af denne grund været nødsaget til at henvende denne rapport til studerende og lærere inden for matematikfaget, der har interesse for abstrakt matematik og logik. Det er en fordel for forståelsen af rapporten at besidde kvalifikationer svarende til, hvad der gennemgås i IMFUFAs emnekreds 7 (matematikkens grundlag).

I det følgende vil vi gennemgå rapportens indhold for at give et overblik over, hvordan den enkelte læser kan bruge rapporten. Vi vil desuden for hvert kapitel angive, hvilken litteratur vi primært har anvendt for på denne måde at henvise den interesserede læser til yderligere uddybning af emnerne.

- Kapitel 1 indeholder en overordnet og uformel gennemgang af id,erne og filosofien bag Hilberts program. Vi gennemgår formålet med de enkelte dele af programmet, hvorledes det søgtes opfyldt og diskuterer kort i hvilken udstrækning, det lykkedes for Hilbert at løse de problemer, der var årsag til opstillingen af programmet. I dette kapitel er anvendt [Hilbert, 1925] og [Hilbert, 1927].

- Kapitel 2 præsenterer de begreber, der er nødvendige for forståelsen af kapitel 3 og især kapitel 4. Vi opbygger et 1. ordens sprog og opstiller to kalkyler inden for dette. For kalkylerne definerer vi de gældende syntaktiske regler og den semantiske tolkning af disse. Bla. defineres begreberne fuldstændighed og konsistens til senere brug i Gentzens bevis. I dette kapitel er anvendt [Bell & Machover, 1977], [Takeuti, 1987] og [Gentzen, 1935].

- Kapitel 3 viser, hvorledes Peanos aksiomer kan formaliseres inden for en af de i kapitel 2 definerede kalkyler. Herefter beskriver vi de primitive rekursive funktioner og præsenterer Gödels to ufuldstændighedssætninger. I dette kapitel er anvendt [Kleene, 1952], [Kleene, 1986], [Smorynski, 1977] og [Gödel, 1931].

- Kapitel 4 indledes med en rekursiv repræsentation af ordinaltallene, hvorefter vi gennemgår argumenterne og gangen i Gentzens bevis, herunder tildeling af ordinaltal og reduktion på beviser i Peano-aritmetikken. I dette kapitel er anvendt [Takeuti, 1987] og [Gentzen, 1936].

- Kapitel 5 er en diskussion af først Hilberts finitisme, dernæst betydningen af Gentzens konsistensbevis for Hilberts program og sluttelig en kort gennemgang af nogle eksempler på, hvorledes tankerne i Hilberts program viser sig i moderne bevisteori. I dette kapitel er anvendt artiklerne [Sieg, 1988], [Simpson, 1988] og [Feferman, 1988].[16]

- Endelig indeholder rapporten et appendiks med Peanos aksiomer for de naturlige tal, og et appendiks hvori den mængdeteoretiske konstruktion af ordinaltallene beskrives. I disse er benyttet [Bell & Machover, 1977]. Til sidst et appendiks om den primitive rekursive aritmetik, hvor vi benytter [Takeuti, 1987].

[16] Alle tre artikler er bidrag til et symposium afholdt om Hilberts program i 1985.

Kapitel 1

Hilberts program

I dette kapitel vil vi gennemgå Hilberts program, som oprindeligt blev formuleret i 1925. Som nævnt præsenterede Hilbert i år 1900 en række uløste matematiske problemer.[1] Hovedformålet med det efterfølgende program var at skabe en basis for matematikken således, at de vigtigste af de nævnte problemer, nemlig grundlagsproblemerne, kunne løses. Dette ville give matematikerne mulighed for igen at kunne beskæftige sig med det for Hilbert væsentligste — at skabe resultater.

1.1 Intentionerne

Hilbert er af den opfattelse, at en stor del af problemet omkring matematikkens grundlag udsprang af begrebet **det uendelige**. Samtidig mener han, at Cantors arbejde med og fastlæggelse af aksiomer for uendelige mængder har essentiel betydning for matematikken. Derfor er det Hilberts mål gennem sit program at sikre matematikken og Cantors paradis:

»We shall carefully investigate those ways of forming notions and those modes of inference that are fruitful; we shall nurse them, support them, and make them usable, wherever there is the slightest promise of success. No one shall be able to drive us from the paradise that Cantor created for us.« [HILBERT, 1925; p. 376].

Hilberts udgangspunkt er – ligesom Russell og Whiteheads – at skal matematikkens grundlag sikres, må man starte fra bunden og formalisere matematikken. Dette skal gøres på en sådan måde, at enhver tvivl om definitioner, aksiomer og bevisformer fjernes. Inden for et givet system skal ethvert udsagn om systemet kunne beskrives inden for det formelle sprog, systemet udtrykkes i, og ethvert udsagn om systemet skal kunne udledes fra aksiomerne ved hjælp af formaliserede bevisformer. Det Hilbert kalder **bevisteori** består i at formalisere alle matematiske udtryk og udledningsmetoder og underkaste disse en undersøgelse af gyldigheden af de benyttede bevismetoder. Dette er vejen frem for Hilbert:

»With this new way of providing a foundation for mathematics, which we may appropriately call a proof theory, I pursue a significant goal, for I should like to eliminate once and for all the questions regarding the foundations of mathematics ...« [HILBERT, 1927; p. 464].

Alle sætninger, som kan udtrykkes inden for det formaliserede sprog, skal kunne bevises eller modbevises. Dvs. Hilbert kræver, at formaliseringen er **fuldstændig**. Et af de udtryk, der således skal kunne bevises, er et udsagn, der postulerer konsistensen af systemet. Dette udtryk vil sige noget *om* systemets egenskaber; et sådan udsagn kaldes en metasætning, og det at arbejde med sådanne sætninger kalder Hilbert for **metamatematik**.

[1] Listen er publiceret i [HILBERT, 1902].

1.2 Finitisme

Det første trin i programmet er at lokalisere de bevismetoder, som kan være det sikre fundament, som intet menneske kan være i tvivl om gyldigheden af, og som derfor kan benyttes til at udlede de vigtige metasætninger. Id,en er således at indkredse en del af et matematisk system, en kerne, som ingen kan være i tvivl om gyldigheden af, og som man begrænser sig til at arbejde inden for, når man beviser de vigtige metasætninger om systemet. Hilbert er ikke præcis, når han beskriver denne **finite** kerne, men han nævner, at den udelukkende indeholder endelige strenge af symboler, det være sig sætninger, definitioner og beviser. Hilbert noterer, med slet skjult henvisning til Brouwer:

»So, for example, some stress the stipulation, as a kind of restrictive condition, that, if mathematics is to be rigorous, only a finite number of inferences is admissible in a proof — as if anyone had ever succeeded in carrying out an infinite number of them!« [Hilbert, 1925; p. 370].

Udtryk, der er tilladt inden for den finite kerne, kan opdeles i de **kontentuelle** sætninger og de resterende finite sætninger. De kontentuelle sætninger indeholder konkret matematisk viden og kan tilskrives en sandhedsværdi på baggrund af deres indhold. Disse sætninger indeholder således ikke variable. De resterende finite sætninger er udtryk, som indeholder begrænsede kvantorer over variable, og som derfor i princippet kan opdeles i endeligt mange kontentuelle sætninger, og dermed kontrolleres og tilskrives en sandhedsværdi.[2]

1.3 Hilberts formalisme

Det næste skridt i arbejdet mod den sikre matematik er formaliseringen af matematikken.

»When we are engaged in investigating the foundations of a science, we must set up a system of axioms which contains an exact and complete description of the relations subsisting between the elementary ideas of that science.« [Hilbert, 1902; p. 447].

En sådan formalisering skal ifølge Hilberts intentioner være fuldstændig, så alle udsagn, som kan formuleres om systemet, kan udtrykkes og bevises formelt.

Russel og Whiteheads værk *Principia Mathematica* havde vist, at matematikken ikke kunne funderes på logik alene. Man er nødt til at tilføje systemet nogle ikke-logiske aksiomer, som beskriver netop dette systems specielle egenskaber.

»Kant already taught – and indeed it is part and parcel of his doctrine – that mathematics has at its disposal a content secured independently of all logic and hence can never be provided with a foundation by means of logic alone ... something must already be given to our faculty of representation, certain extralogical concrete objects that are intuitively present as immediate experience prior to all thought.« [Hilbert, 1925; p. 376].

Hilbert vælger udover de logiske aksiomer at bygge sit formelle system til bevisteorien af aksiomer, der beskriver funktioner på tallene og uendelige mængder.[3] Disse uendelige mængder skal dog kun betragtes som et abstrakt begreb, der ikke nødvendigvis har nogen realisering.[4]

[2] Man har senere præciseret funktionerne som de primitive rekursive funktioner. Disse gennemgås i afsnit 3.2.1.

[3] [Hilbert, 1927; pp. 465].

[4] Hilberts arbejde har inspireret til det, man senere har betegnet formalismen. Det er dog vigtigt at understrege, at det ikke er Hilberts mening, at matematikeren kun skal arbejde inden for formelle systemer. Intuitionen er efter hans mening et meget vigtigt og nødvendigt redskab til udviklingen af nye resultater inden for matematikken, men sikringen af resultaterne, og dermed hele matematikken, kræver en efterfølgende formalisering. På dette punkt adskiller Hilbert sig altså væsentligt fra den senere udvikling inden for formalismen.

1.3.1 Idealelementer og idealsætninger

En vigtig del af den kreative udvikling af matematikken kan være et resultat af arbejdet med **idealelementer**. Et idealelement er f. eks. det imaginære tal i. i er ikke et reelt tal, men kan håndteres algebraisk ved at benytte, at $i^2 = -1$. Brugen af i inden for algebra sikrer eksempelvis algebraens fundamentalsætning; at ethvert n'te grads polynomium kan opløses i n faktorer. Et idealelement er således ikke noget, der kan formuleres inden for det system, der arbejdes med, men man kan benytte begrebet med gode resultater, uden at det kommer i modstrid med sætninger, som kunne udledes inden for systemet, før idealelementet tilførtes.

Hilberts id, er da at indføre begrebet **idealsætninger** parallelt til idealelementer. Disse idealsætninger kan være sætninger, der omhandler eller inkluderer uendelige mængder, og de er således hverken kontentuelle eller finite sætninger. De er abstrakte udtryk, som ligger inden for formalismen men uden for den finite kerne. Disse sætninger skal ikke kunne resultere i nye finite sætninger, som ikke allerede kan udledes ved brug af metoder fra den finite kerne. Den kreative udvikling består da i, at man først udleder sætninger ved brug af idealsætningerne, og derefter viser, at det kan gøres uden brug af disse. På denne måde vil systemets pålidelighed være sikret.

1.4 Konsistensbeviset

I stedet for at give en algoritme til at eliminere alle idealudsagn fra et givent bevis vælger Hilbert at give et konsistensbevis for hele det formelle system — først det formelle system, der beskriver teorien om de naturlige tal, og slutteligt et system, som skal kunne indeholde hele matematikken. Hvis der kan gives et konsistensbevis for hele det formaliserede system udelukkende ved brug af elementer fra den finite kerne, har man sikret, at idealsætningerne ikke resulterer i udtryk, der er i modstrid med udtryk udledt inden for den finite kerne.

En sammenhæng mellem begreberne sandhed, eksistens og konsistens giver Hilbert således:

»If the arbitrarily given axioms do not contradict each other through their consequences, then they are true, then the objects defined through the axioms exist. That, for me, is the criterion of truth and existence.« [BARWISE, 1977; p. 825].

Hvis der kan gives et konsistensbevis for et system, vil man kunne tillade sig at udlede både finite sætninger og idealsætninger fra systemet på trods af, at det kun vil være muligt at kontrollere de finite sætninger. Hilbert sammenligner på dette punkt matematikken med fysikken:

»Only certain combinations and consequences of the physical laws can be checked by experiment — just as in my proof theory only the real propositions are directly capable of verification.« [HILBERT, 1927; p. 475].

Et system er inkonsistent, hvis der findes en formel α, hvor både α og $\neg\alpha$ kan bevises i systemet. Et inkonsistent system karakteriseres ved, at alle formler kan bevises. I f. eks. teorien for de naturlige tal kan formlen $0 = 0$ bevises. En antagelse om inkonsistensen af teorien giver derfor, at $0 \neq 0$ må kunne bevises. Hvis det kan vises, at formlen $0 \neq 0$ ikke kan bevises inden for formaliseringen af teorien om de naturlige tal, er beviset for konsistensen af systemet givet. Det faktiske bevis, for at denne sætning ikke kan bevises inden for systemet, sidestiller Hilbert nonchalant med måden, hvorpå man gennem et modstridsbevis kan vise, at $\sqrt{2}$ er et irrationelt tal,[5] og han mener, at det dermed ikke vil være et problem at skabe konsistensbeviset:

»The demonstration [that "$0 \neq 0$" is not a provable formula] can in fact be given, and this provides us with a justification for the introduction of our ideal propositions.« [HILBERT, 1927, p. 471].

[5] [HILBERT, 1925; p. 383].

1.5 Programmets resultater

Resultaterne af Hilberts arbejde med sikringen af matematikkens grundlag kan opstilles i forhold til de 3 punkter, som programmet var delt op i:

- **Indkredsning af systemets finite kerne.** Hilbert fik aldrig selv præciseret, hvad han lagde i dette begreb. Man har senere formelt defineret Hilberts finitisme som det, der kan udtrykkes ved hjælp af en række regler, som beskriver den såkaldte simple primitive rekursive aritmetik (se iøvrigt appendiks C).

- **Formaliseringen af systemet.** Denne formalisering af matematikken har vist sig at være yderst nyttig. Det er et værktøj, som enhver matematiker benytter sig af. Vi vil i kapitel 2 beskrive en version af det formelle sprog, som bliver benyttet i dag. Denne formalisering vil vi samtidig få brug for i det videre arbejde med Hilberts bevisteori.

- **Beviset for det formelle systems konsistens.** Hilbert får aldrig givet konsistensbeviset, men hans arbejde med konsistensbeviser og afgrænsningen af den finite kerne bliver udgangspunkt for GÖdels arbejde, som resulterer i de såkaldte ufuldstændighedssætninger. Disse sætninger slår fast, at det er umuligt at give absolutte konsistensbeviser for systemer, der har samme omfang som Hilberts opstillede aksiomsystem.

Kapitel 2

1. ordens prædikatlogik

I dette kapitel opbygges et sprogligt og begrebsligt apparatur, der vil finde anvendelse i store dele af rapporten. De matematiske systemer, som rapporten omhandler, er alle strukturer, bestående af et univers (domæne), hvorpå operationer og relationer virker. Som eksempler på strukturer kan nævnes:

- Elementær talteori (aritmetik) har som univers mængden af de naturlige tal $\mathbf{N}$, operationerne addition $+$, multiplikation $\cdot$ samt relationerne efterfølger S og identitet $=$.

- Mængdelære kan karakteriseres ved et univers, der består af klassen[1] af alle mængder. Elementrelationen $\in$ og identitetrelationen $=$ betragtes som de eneste basale relationer. Inklusion $\subseteq$, der umiddelbart virker som en basal relation, kan udtrykkes ved elementrelationen, hvorfor det ikke er nødvendigt at indføre $\subseteq$ som basal relation.[2]

- Euklidisk geometri i planen har alle punkter og rette linier i sit univers. Af relationer er blandt andet egenskaben at være et punkt, egenskaben at være en ret linie samt relationen, der udvælger alle 3-tupler[3] $\langle x, y, z\rangle$, hvorom det gælder, at x, y og z alle er punkter på samme rette linie og y ligger mellem x og z.

Vi stiller et logisk sprog op, så det er egnet til at beskrive systemer med en strukturopbygning. I dette sprog vil vi formulere to kalkyler, der som alle kalkyler kun består af syntaktiske definitioner og regler. Den første vi formulerer, er en logisk kalkyle, der afspejler tankerne i Hilberts program omkring aksiomatisering af matematiske systemer. Kalkylen består primært af aksiomer og siges derfor at være i Hilbertstilen. Som et bevisteoretisk instrument er en kalkyle i Hilbertstilen ikke velegnet, hvorfor vi indfører Gentzens sekventkalkyle, der i højere grad afspejler dagligdags bevismetoder, til brug i resten af rapporten. Vi præsenterer Hilbert-kalkylen, da den efter vores mening giver en god introduktion til begreberne syntaks og semantik. Gentzen-kalkylen har en anden funktion, da den danner basis for rapportens konsistensbevis for aritmetikken.

I forbindelse med hver kalkyle indfører vi de syntaktiske og semantiske definitioner og viser den semantiske fuldstændighed af de to kalkyler. Som afslutning af kapitlet viser vi desuden ækvivalensen mellem Hilbert-kalkylen og Gentzen-kalkylen.

[1] Vi skelner mellem klasse og mængde på følgende måde: En klasse er en samling af objekter. De klasser, der kan være indeholdt i en anden klasse, kaldes mængder.

[2] $X \subseteq Y \Leftrightarrow \forall Z(Z \in X \Rightarrow Z \in Y)$, hvor X og Y er mængder.

[3] En n-tupel betegner en ordnet mængde med n pladser.

2.1 Sproget $\mathcal{L}_1$

I det følgende vil vi beskrive de bestanddele, der udgør et formelt sprog samt klarlægge, hvilke krav vi må stille til valg af formelt sprog, så udsagn om strukturer kan udtrykkes.

En **struktur**, $\mathfrak{U}$, kan opdeles i tre dele, hvor vi i hver del skriver de i sproget korresponderende symboler op:

1. En ikke-tom klasse, der kaldes **universet** $\mathcal{U}$ (domænet). Elementerne af dette univers kaldes strukturens individer. Til at betegne en størrelse, der kan antage ,n eller flere af individerne som sin værdi, bruges en **variabel**. Variable betegnes i vores sprog med x, y og z til et begrænset antal og $x_1, x_2, \ldots, x_n$ til n variable.

2. **Relationer** på universet. En n-ary relation på $\mathcal{U}$ er en samling af n-tupler af elementer i $\mathcal{U}$, dvs. en del-klasse af $\mathcal{U}^n$, $n \geq 1$. En unary (1-ary) relation på $\mathcal{U}$ kaldes en egenskab, da den udvælger alle de elementer i $\mathcal{U}$, der opfylder den af relationen dikterede egenskab, hvilket er en del-klasse af $\mathcal{U}$. Som eksempler på unary relationer kan nævnes 'x er et primtal' og $2 \mid y$ (y er et lige tal). Strukturens relationer virker på universets individer, men udtrykt i sproget vil det være variable, der repræsenterer individerne. Identitetsrelationen $=$ er en 2-ary relation ligesom ordningsrelationen $\leq$, der udvælger alle ordnede par (2-tupler) $\langle u_1, u_2 \rangle$, $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$, hvorom det gælder, at $u_1 \leq u_2$. Relationer kaldes også prædikater, og i sproget betegnes de med **prædikatsymbolet** P. Et n-ary prædikatsymbol skrives $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

3. **Operationer** på universet. En n-ary operation på universet $\mathcal{U}$ er en funktion fra $\mathcal{U}^n$ til $\mathcal{U}$, $n \geq 0$. I aritmetikken er addition en 2-ary operation fra $\mathbf{N}^2$ ind i $\mathbf{N}$, idet $f(x, y) = x + y$ definerer $+$. En 0-ary operation er en funktion fra $\mathcal{U}^0$, dvs. $\{\emptyset\}$, til $\mathcal{U}$. Til enhver 0-ary operation hører derfor ,n bestemt funktionsværdi. I vores sprog kaldes 0-ary funktionssymboler for **konstanter**, $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Et symbol, der betegner en n-ary operation, kaldes et n-ary **funktionssymbol** og betegnes $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Et funktionssymbol $f(x_1, \ldots, x_n)$ kan skrives som et prædikatsymbol $P(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, idet funktionsværdien for operationen svarende til f blot medtages som en ekstra variabel i relationen svarende til P.[4] Eksempelvis kan den binære operation $f : \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}$, $f(x, y) = x + y$ omskrives til en relation, der består af alle de 3-tupler $\langle x, y, z \rangle$, hvorom det gælder, at $f(x, y) = z$. Derfor er funktionssymboler i princippet unødvendige. Ved at bruge variable og funktionssymboler kan vi rekursivt konstruere udtryk, der kaldes **termer**.

2.1.1 Definition. Termer er den mindste klasse af udtryk i sproget opnået ved

1. Enhver variabel, der ikke optræder i forbindelse med andre symboler, er en term.

2. Hvis f er et n-ary funktionssymbol og $t_1, \ldots, t_n$ er n termer, så er $f(t_1, \ldots, t_n)$ en term. □

Som vi nævnte ovenfor, kalder vi de 0-ary funktionssymboler for konstanter. Det følger heraf, at konstanter er termer.

2.1.2 Eksempel. k_1, x, y, $f_1(k_1, x)$, $f_2(x, y, f_1(k_1, x))$ og $f(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ er alle termer. □

Desuden har vi brug for **logiske symboler**: $\neg$ (negation), $\wedge$ (konjuktion), $\vee$ (disjunktion), $\Rightarrow$ (implikation), $\Leftrightarrow$ (biimplikation), $=$ (lighed), $\forall$ (for alle) og $\exists$ (der eksisterer). De første fem kaldes

[4] En n-ary funktion f er en klasse af $(n+1)$-tupler, hvorom det gælder, at hvis $\langle\langle x_1, \ldots, x_n\rangle, y\rangle \in f$ og $\langle\langle x_1, \ldots, x_n\rangle, z\rangle \in f$, så er $y = z$.

konnektiver, = kaldes **lighedssymbolet** og de sidste to kaldes henholdsvis **den universelle kvantor** og **eksistenskvantoren**.[5]

Når et sprog indeholder termer, prædikatsymboler og logiske symboler, kan vi rekursivt danne **formler**.

2.1.3 Definition. Hvis P er et n-ary prædikatsymbol og $t_1, \dots, t_n$ er n termer, så kaldes $P(t_1, \dots, t_n)$ en **atomisk formel**. Formler i sproget er da den mindste klasse af udtryk, der defineres ved

1. Enhver atomisk formel er en formel.

2. Hvis α og β er formler, så er $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \Rightarrow \beta$, $\alpha \Leftrightarrow \beta$, $\forall x\alpha$ og $\exists x\alpha$ alle formler. □

2.1.4 Eksempel. $x = k_1$, $y = x$ og $y = k_1$ er alle atomiske formler, idet = er et 2-ary prædikatsymbol. Dermed må

$$\neg(x = k_1), \exists x(y = x) \text{ og } \forall x(y = x) \Rightarrow (y = k_1)$$

være formler. Ud fra disse kan f. eks. formlen

$$\neg(x = k_1) \wedge (\forall x(y = x) \Rightarrow (y = k_1))$$

konstrueres. □

En intuitiv forståelse af kvantorernes rolle i forhold til domænet kunne være følgende: Når en variabel x optræder i forbindelse med kvantorerne $\forall$ og $\exists$, er det underforstået, at værdierne for x i α gennemløber hele $\mathcal{U}$, hvorimod variable, der ikke forekommer i forbindelse med en kvantor, blot kan tildeles en tilfældig værdi fra universet. Formlen $f(k_1, k_2) = y$ vil udtrykke noget forskelligt alt efter om y har værdien $f(k_1, k_2)$ eller ej. Det er ikke umiddelbart muligt at vide, hvilken værdi y har, da denne information ikke er givet i formlen. I $\forall y(f(k_1, k_2) = y)$ kan alle elementer i $\mathcal{U}$ på skift indsættes i $f(k_1, k_2) = y$ på y's plads, hvorved påstanden som $\forall y(f(k_1, k_2) = y)$ udtrykker, i en vis forstand kan bestemmes.[6] Dette afstedkommer følgende skelnen:

2.1.5 Definition. En variabel x, der forekommer i en del af en formel α på formen $\forall x\beta(x)$ eller $\exists x\beta(x)$ kaldes **bundet** i α. Hvis formlen α ikke indeholder x, er x også bundet. En variabel, der ikke optræder bundet i en formel α, optræder **frit** i α. □

2.1.6 Eksempel. I $\forall x(x = y)$ optræder x bundet og y frit, hvorimod både x og y optræder bundet i $\forall x(x = x)$. I $\forall x\big((x = y) \wedge \exists y(y = x)\big) \Rightarrow \exists z\big(\neg(x = z)\big)$ optræder x bundet de første to gange, y frit første gang og z bundet. □

Formler, som ikke indeholder frie variable, kalder vi semantisk bestemmelige påstande. Formler, der indeholder frie variable, udtrykker ubestemmelige påstande, indtil de tildeles en konkret værdi fra universet, hvorved de bliver bestemmelige.

2.1.1 Sprog med færre logiske symboler

I det ovenstående har vi nævnt ialt fem konnektiver: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ og $\Leftrightarrow$. Men ikke alle disse er nødvendige, og det viser sig, at i eksempelvis den klassiske logik kan præcis det samme udtrykkes ved

[5] Konnektivernes betydning og reglerne for manipulation med dem, også kaldet udsagnslogik, bør læseren være bekendt med på forhånd. En udførlig gennemgang findes i [Bell & Machover, 1977; pp. 20].

[6] Forskellen mellem de to formler er udtryk for det, der i mængdelæren betegnes som åbne og lukkede udsagn.

brug af de to konnektiver $\neg$ og $\Rightarrow$. Hvis sproget skal bruges til at beskrive en struktur indeholdende klassisk logik, vil man normalt vælge denne kombination, da disse konnektiver optræder naturligt på vigtige steder i det, der kaldes logik i Hilbertstil.[7] Dette vil dog fremstå tydeligere i afsnit 2.2, hvor en sådan logik formuleres.

- Formlen $\neg(\alpha \Rightarrow \neg\beta)$ har samme betydning som $\alpha \wedge \beta$, hvorved symbolet for konjuktion kan elimineres fra vores sprog.[8]
- Formlen $(\neg\alpha \Rightarrow \beta)$ har samme betydning som formlen $\alpha \vee \beta$, så også symbolet for disjunktion kan elimineres fra sproget.
- Symbolet for biimplikation elimineres fra sproget, da formlen $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$ har samme betydning som $\alpha \Leftrightarrow \beta$.
- Endelig kan vi udelade symbolet for eksistenskvantoren fra sproget, idet formlen $\neg(\forall x \neg\alpha)$ har samme betydning som formlen $\exists x\alpha$.

Vi har valgt primært at anvende den universelle kvantor, negationen og implikationen, mens vi betragter de øvrige konnektiver og eksistenskvantoren som en slags forkortelses-notation. I visse beviser udelader vi disse ikke-basale symboler for simpelhedens skyld.

Opsummering af sprogets symboler

Det sprog, vi har valgt at benytte, består af følgende symboler:

- **Variable**: Både frie og bundne variable betegnes x, y og z eller $x_1, x_2, \ldots, x_n$ for n variable og $x_0, x_1, \ldots$ for en uendelig følge af variable.
- **Konstanter**: 0-ary funktionssymboler betegnes med $k_1, k_2, \ldots, k_n$ for n konstanter og $k_0, k_1, \ldots$ for en uendelig følge af konstanter.
- **Termer**: Skrives $t_1, t_2, \ldots, t_n$ for n termer og $t_0, t_1, \ldots$ for en uendelig følge af termer.
- **Funktionssymboler**: Et n-ary funktionssymbol udtrykkes f, eller $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ når termerne har en betydning i den sammenhæng, som funktionssymbolet optræder i. For n funktionssymboler skrives $f_1, f_2, \ldots, f_n$.
- **Prædikatsymboler**: Et n-ary prædikatsymbol betegnes P, eller $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$. For n prædikatsymboler skrives $P_1, P_2, \ldots, P_n$.
- **Lighedssymbol**: Til at betegne identitetsrelationen bruges $=$.
- **Formler**: Symboliseres ved α, β og γ eller $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
- **Logiske symboler**: $\neg$, $\Rightarrow$ og $\forall$.
- **Forkortelsessymboler**: $\vee$, $\wedge$, $\Leftrightarrow$ og $\exists$.
- **Hjælpesymboler**: Paranteser (,) og , (komma).

[7] Inden for intuitionistisk logik skal alle konnektiver og kvantorer medtages, idet argumenterne for, at antallet af konnektiver kan reduceres, bygger på antagelser, der ikke gælder i den intuitionistiske tankegang, f. eks. at α og $\neg(\neg\alpha)$ er ækvivalente.

[8] Argumentet herfor er egentlig et semantisk argument, da $\neg(\alpha \Rightarrow \neg\beta)$ er sand hviss α er sand **og** β er sand, hvilket også er tilfældet for formlen $\alpha \wedge \beta$.

2.1.2 Andre formelle sprog

Et system som det, vi netop har beskrevet, kaldes et **formelt sprog** af **1. orden**, da variablene kun kan løbe over universets individer. Sproget betegner vi $\mathcal{L}_1$. Det er i dette sprog, at 1. ordens prædikatlogikken formuleres. Der findes imidlertid andre formelle sprog.

Sprog af 2. orden

Der findes sprog af højere orden end $\mathcal{L}_1$. Et sprog af 2. orden indeholder udover det udstyr, et 1. ordens sprog besidder, en anden type variable, som ikke spænder over elementer i strukturens univers, men derimod over delmængder af $\mathcal{U}^n$, hvilket svarer til, at de nye variable løber over prædikater, der som tidligere nævnt fortolkes som delmængder. Derfor besidder et 2. ordens sprog også prædikatvariable.

Hvad er da argumentet for at anvende et 1. ordens sprog? Lad $\mathfrak{U}_2$ være en struktur, der beskrives i et 2. ordens sprog og lad $\mathfrak{U}_1$ være en struktur, der fås ud fra $\mathfrak{U}_2$ på følgende måde: Universet af $\mathfrak{U}_1$ består af alle individer fra $\mathfrak{U}_2$ plus alle mængder af individer fra $\mathfrak{U}_2$. $\mathfrak{U}_1$'s operationer er defineret på en sådan måde, at når de anvendes på individer af $\mathfrak{U}_2$, opfører de sig på samme måde som de tilsvarende operationer i $\mathfrak{U}_2$. Relationerne af $\mathfrak{U}_1$ er relationerne af $\mathfrak{U}_2$ plus to yderligere relationer: egenskaben at være et individ af $\mathfrak{U}_2$ og som før nævnt elementrelationen. På denne måde kan mange egenskaber – men ikke alle – ved et 2. ordens sprog indfanges af et 1. ordens sprog. Fuldstændigheden af 1. ordens logikken, som vi vil vise senere i dette kapitel, kan vises, hvorimod der ikke kan vises en fuldstændighed af 2. ordens logikken.

2.2 En formulering af prædikatlogikken i Hilbertstil

Et formaliseret logisk system er grundlæggende karakteriseret ved et sæt aksiomer og slutningsregler. Ved opbygningen af et system i Hilbertstil, skal systemet aksiomatiseres sådan, at aksiomerne udtrykker så mange karakteristika ved systemet som muligt. Gennem en formulering af aksiomer i et formelt sprog formuleres systemets egenskaber. Strukturen 'Den klassiske matematiske logik' formaliserer vi gennem aksiomer formuleret i sproget $\mathcal{L}_1$, der indeholder de logiske symboler $\neg, \Rightarrow, \forall$ og $=$. Enkelte steder benyttes de fire resterende logiske symboler, hvis det i det specifikke tilfælde sænker kompleksiteten eller letter forståelsen. Det skal blot holdes in mente, at f. eks. $\exists x\alpha$ blot er en kortere måde at skrive $\neg(\forall x \neg\alpha)$ på, og at $\exists$ dermed ikke er et basalt symbol i det sprog, vi formulerer prædikatlogikken i. Ud fra aksiomerne kan nye sætninger genereres vha. ‚n eller flere slutningsregler, således at vi gennem $\mathcal{L}_1$ kan udtrykke udsagn om strukturen 'Den klassiske matematiske logik'. Det aksiomatiserede system sammen med slutningsregler udgør en **kalkyle**, en **syntaktisk** maskine, der kun består af aksiomerne samt de udtryk, der kan udledes af disse. **Semantikken** etablerer forbindelsen mellem strukturen og de formler, vi har udledt i kalkylen, så formlernes 'rigtighed', eller mere korrekt, formlernes sandhedsværdi, kan efterprøves. Semantik handler om fortolkning af kalkylen, og overvejelser derigennem giver en begrundelse for, at aksiomer og slutningsregler ser ud, som de gør. En logisk kalkyle sammen med en semantisk fortolkning udgør en **formaliseret matematisk logik**.

2.2.1 Syntaks

Prædikatkalkylen **H** består af et antal aksiomer og ‚n slutningsregel. I ‚t af aksiomerne (VI) anvendes en terminologi, der kræver en definition.

2.2.1 DEFINITION. $\alpha(x/t)$ betegner, at enhver fri forekomst af x i α substitueres med termen t. Det siges, at t er **fri for** x i α, hvis x ikke forekommer i en delformel af α, der har formen $\forall y\beta$, hvor y forekommer i t. □

Hvis x optræder i en delformel af α, der har formen $\forall y\beta$, hvor y optræder i t, kan der opstå problemer, idet der findes variable i t, der ikke forekommer frit i α. Hvis α har formen $\forall y(x = y)$ vil $\alpha(x/t)$ i tilfældet, hvor t er y, blive $\alpha(x/y)$, hvilket svarer til $\forall y(y = y)$.

Det følger af definition 2.2.1, at hvis t er fri for x i α, vil $\alpha(x/t)$ indeholde frie variable, hviss α gør det.

Aksiomerne for **H** kan nu defineres.

2.2.2 DEFINITION. I det følgende betegner α, β og γ $\mathcal{L}_1$-formler, t og t_i $\mathcal{L}_1$-termer og x en variabel i $\mathcal{L}_1$. Som aksiomer for **H** vælges alle $\mathcal{L}_1$-formler på formen

(I) $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$

(II) $\big(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)\big) \Rightarrow \big((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)\big)$

(III) $(\neg\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \big((\neg\alpha \Rightarrow \neg\beta) \Rightarrow \alpha\big)$

(IV) $\forall x(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\forall x\alpha \Rightarrow \forall x\beta)$

(V) $\alpha \Rightarrow \forall x\alpha$, hvis x kun forekommer bundet i α.

(VI) $\forall x\alpha \Rightarrow \alpha(x/t)$. Det må her kræves, at t er fri for x i α.

(VII) $t = t$

(VIII) $t_1 = t_{n+1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow t_n = t_{2n} \Rightarrow f(t_1, \ldots, t_n) = f(t_{n+1}, \ldots, t_{2n})$, hvor f er et n'te grads funktionssymbol.

(IX) $t_1 = t_{n+1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow t_n = t_{2n} \Rightarrow P(t_1, \ldots, t_n) \Rightarrow P(t_{n+1}, \ldots, t_{2n})$, hvor P er et n'te grads prædikatsymbol.

(X) Alle formler på formen $\forall x_1 \ldots \forall x_k\alpha$, hvor $k \geq 1$ og α er et aksiom ifølge I–IX. Dette kaldes generalisering.[9] □

Aksiomernes betydning forstås bedre, når de sættes i sammenhæng med slutningsreglen i **H**, der ud fra to givne $\mathcal{L}_1$-formler genererer en ny.

2.2.3 DEFINITION. Hvis de to $\mathcal{L}_1$-formler α og $\alpha \Rightarrow \beta$ er givet, så kan β sluttes herfra. Slutningsreglen kaldes **modus ponens** (MP). □

I–III udgør aksiomerne i udsagnslogikken. Alle tre indeholder $\Rightarrow$, mens III er ene om at beskrive egenskaber ved $\neg$. Antag, at α gælder. Brug af MP på denne antagelse og aksiom I giver $\beta \Rightarrow \alpha$. I udtrykker således blot den egenskab ved $\Rightarrow$, at hvis α er givet, så vil $\beta \Rightarrow \alpha$ følge uafhængigt af formen af formlen β. Aksiom II udtrykker efter samme anskuelse, at givet $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)$ og $\alpha \Rightarrow \beta$ så vil $\alpha \Rightarrow \gamma$ følge. Ud fra III fås, at hvis $\neg\alpha \Rightarrow \beta$ og $\neg\alpha \Rightarrow \neg\beta$ er givet, så kan vi, ved brug af MP to gange, slutte α. Aksiom III er løst sagt en formalisering af modstridsbeviser. Vil vi vise en formel, antager vi dens negation og viser, at dette fører til en modstrid. Hermed er formlen, som vi ville vise, bevist. IV–VI omhandler $\forall$-kvantoren. Givet $\forall x\alpha$ og $\forall x(\alpha \Rightarrow \beta)$ følger ifølge IV $\forall x\beta$. Dette aksiom minder om MP påført $\forall$. Aksiom V udtrykker, at hvis α så $\forall x\alpha$, hvis x er bundet i α. Hvis x optræder frit i α, kan der opstå problemer som i følgende eksempel.

2.2.4 EKSEMPEL. Lad α være formlen $x = k_1$. Hvis α gælder, så vil $\forall x(x = k_1)$ ikke nødvendigvis gælde, da betydningen af $\forall x$ er 'for alle værdier af x'. $\forall x\alpha$ læses i dette eksempel

[9] Bemærk, at der her ingen restriktioner er på $x_1 \ldots x_k$.

'for alle værdier af x er $x = k_1$'. □

Aksiom VI sikrer, at hvis $\forall x\alpha$ så $\alpha(x/t)$, hvor t er fri for x i α. Hvis t ikke er fri for x i α kan aksiomet ikke bruges, da en formel $\forall x\exists y\big(\neg(x = y)\big)$ med y som t vil resultere i en formel $\exists y(\neg(y = y))$, der ikke gælder. Problemet har en analogi inden for integralregning, hvor der ikke må substitueres med den variabel, der samtidig fungerer som integrationsvariabel, hvilket indikerer, at integrationsvariablen har samme status som en bundet variabel i prædikatlogikken.

VII–IX indfører lighed i kalkylen **H**. Prædikatkalkylen for et sprog $\mathcal{L}$ uden lighed vil derfor have aksiomerne I–VI og X. Aksiom VIII symboliserer, at hvis der i et funktionsudtryk indsættes termer, der er ækvivalente med dem, de erstatter, så ændres funktionsværdien ikke. Hvis $t_1 = t_{n+1}, \ldots, t_n = t_{2n}$ og $P(t_1, \ldots, t_n)$ alle gælder, så vil relationen $P(t_{n+1}, \ldots, t_{2n})$ ifølge IX også gælde.

X udtrykker blot, at hvis aksiomerne er formler, der gælder, så vil de gælde for alle de variable, sproget indeholder. De steder, hvor der kan opstå problemer med, om de variable er frie, bundne eller om t er fri for x, er der i hvert enkelt af aksiomerne taget højde for dette.

Som det fremgår af ovenstående pseudo-syntaktiske argumenter, er det svært at retfærdiggøre valget af netop disse aksiomer på et udelukkende syntaktisk grundlag. Derfor må valget af aksiomer blot betragtes som en definition, og aksiomerne I–X sammen med MP må betragtes som de definitioner, der karakteriserer **H**.

Det er nu muligt at beskrive et **bevis** i **H**.

2.2.5 DEFINITION. Givet en mængde Φ bestående af $\mathcal{L}_1$-formler, da er et bevis en endelig følge af formler $\phi_1, \ldots, \phi_n$, hvor det om enhver formel ϕ_i, $1 \leq i \leq n$ gælder, at

- ϕ_i er et aksiom, eller
- $\phi_i \in \Phi$, eller
- ϕ_i fås ved brug af MP på to formler, der begge forekommer før ϕ_i i følgen.

I en følge af formler i et bevis er den sidste formel ϕ_n blevet **udledt** fra Φ i **H**. Det siges, at formlen er blevet **bevist** ud fra Φ i **H**, hvilket skrives $\Phi \vdash_{\mathbf{H}} \phi_n$. Formlerne i Φ kaldes præmisser. Hvis en formel kan udledes uden brug af præmisser i **H**, dvs. $\vdash_{\mathbf{H}} \phi_n$, er ϕ_n blevet bevist i **H**. □

Aksiomerne I–X, slutningsreglen MP, samt ovenstående bevisdefinition $\vdash_{\mathbf{H}}$ kaldes samlet for en **1. ordens prædikatkalkyle**. Alle $\mathcal{L}_1$-formler, der kan bevises i **H**, kaldes **H-formler**.

En sætning, der har stor praktisk værdi i udledninger, er **deduktionssætningen**, der kan reducere omfanget af en udledning væsentligt.

2.2.6 SÆTNING. Lad Φ være en mængde af formler i $\mathcal{L}_1$ og α, β være $\mathcal{L}_1$-formler. Hvis $\Phi, \alpha \vdash_{\mathbf{H}} \beta$ så $\Phi \vdash_{\mathbf{H}} \alpha \Rightarrow \beta$.

BEVIS. Beviset for β ud fra Φ og α er på formen $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, således at γ_n som sidste formel er β.

$$\begin{array}{ll} 1 & \gamma_1 \\ 2 & \gamma_2 \\ \vdots & \\ n & \gamma_n \quad \text{(svarer til } \beta\text{)}. \end{array}$$

Ved induktion over k, $1 \leq k \leq n$, vises, at for ethvert γ_k vil $\Phi \vdash_{\mathbf{H}} \alpha \Rightarrow \gamma_k$, hvis $\Phi, \alpha \vdash_{\mathbf{H}} \gamma_k$, hvorfor det specielt vil gælde for γ_n og dermed β.

Antag, som induktionshypotese, at deduktionssætningen gælder for alle γ_m, hvor $m < k$. Ud fra denne hypotese viser vi, at hvis γ_k kan bevises fra Φ, α, kan $\alpha \Rightarrow \gamma_k$ bevises fra Φ.

Da γ_k optræder i et bevis (for sig selv), må γ_k være ,n af følgende muligheder:

- γ_k er et aksiom i $\mathbf{H}$.
- γ_k var præmis i beviset for sig selv, dvs. enten $\gamma_k \in \Phi$ eller γ_k er α.
- γ_k er opnået ved MP på to formler, der optræder før γ_k i udledningen.

I tilfældet, hvor γ_k er et aksiom i $\mathbf{H}$, kan $\alpha \Rightarrow \gamma_k$ udledes.

1	γ_k	(da γ_k er et aksiom)
2	$\gamma_k \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma_k)$	(I)
3	$\alpha \Rightarrow \gamma_k$	(MP på 1 og 2).

Hvis $\gamma_k \in \Phi$ kan følgende bevises ud fra Φ:

1	γ_k	(da γ_k er en præmis)
2	$\gamma_k \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma_k)$	(I)
3	$\alpha \Rightarrow \gamma_k$	(MP på 1 og 2).

Hvis γ_k er α, kan γ_k ikke som ovenfor indføres som præmis, da vi skal vise, at $\Phi \vdash_{\mathbf{H}} \alpha \Rightarrow \gamma_k$; men ud fra den tomme mængde kan udledes:

1	$(\alpha \Rightarrow \big((\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha)\big) \Rightarrow \big((\alpha \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha)) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha)\big)$	(II hvor β er $(\alpha \Rightarrow \alpha)$ og γ er α)
2	$\alpha \Rightarrow \big((\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha\big)$	(I hvor β er $(\alpha \Rightarrow \alpha)$)
3	$\big(\alpha \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha)\big) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha)$	(MP på 1 og 2)
4	$\alpha \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha)$	(I)
5	$\alpha \Rightarrow \alpha$	(MP på 3 og 4).

Af denne udledning ses det, at for enhver formel α kan $\alpha \Rightarrow \alpha$ bevises. Men da α er γ_k, må vi kunne udlede $\alpha \Rightarrow \gamma_k$.

Sluttelig er der tilfældet, hvor γ_k er opnået ved MP anvendt på to foregående formler (i udledningen af γ_k selv ud fra Φ, α). Hvis de to foregående formler betegnes γ_i og γ_j, hvor $i, j < k$, må γ_j være på formen $\gamma_i \Rightarrow \gamma_k$, således at MP på γ_i og γ_j giver γ_k. Da $i, j < k$ må γ_i og γ_j opfylde induktionshypotesen. Dette betyder, at $\alpha \Rightarrow \gamma_i$ og $\alpha \Rightarrow \gamma_j$ kan bevises. De vil derfor kunne indføres i et bevis fra Φ.

1	$\alpha \Rightarrow \gamma_i$	(ind. hyp.)
2	$\alpha \Rightarrow (\gamma_i \Rightarrow \gamma_k)$	(ind. hyp., hvor γ_j har formen $\gamma_i \Rightarrow \gamma_k$)
3	$(\alpha \Rightarrow (\gamma_i \Rightarrow \gamma_k)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \gamma_i) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma_k))$	(II)
4	$(\alpha \Rightarrow \gamma_i) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma_k)$	(MP på 2 og 3)
5	$\alpha \Rightarrow \gamma_k$	(MP på 1 og 4).

Vi har nu vist, at hvis deduktionssætningen gælder for alle γ_m, hvor $m < k$, vil sætningen også gælde for γ_k. Det resterer at vise, at sætningen gælder for γ_1. Da γ_1 pr. definition er den første formel i udledningen af γ_k ud fra Φ, α kan γ_1 ikke være fremkommet ved MP. γ_1 er derfor enten et aksiom i $\mathbf{H}$ eller en præmis. I argumentationen for induktionstrinnet blev induktionshypotesen kun brugt i forbindelse med tilfældet, hvor γ_k var opnået gennem MP. Derfor er argumenterne for γ_1 som aksiom og præmis præcis de samme som for γ_k, hvorfor de ikke eksplicit gennemgås. ∎

Hvis $\alpha \Rightarrow \beta$ ønskes udledt fra Φ, vil det således ifølge deduktionssætningen være tilstrækkeligt at udlede β fra Φ, α, hvilket både giver en præmis mere og en simplere formel at udlede.

2.2.7 Eksempel. Det vises, at $\beta, \neg\beta \vdash_{\mathbf{H}} \alpha$.[10]

[10] Resultatet i eksemplet vil der blive brug for i beviset for sætning 2.2.19.

1	$(\neg\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \big((\neg\alpha \Rightarrow \neg\beta) \Rightarrow \alpha\big)$	(III)
2	β	(den ene af præmisserne)
3	$\beta \Rightarrow (\neg\alpha \Rightarrow \beta)$	(I med β som α og $\neg\alpha$ som β)
4	$\neg\alpha \Rightarrow \beta$	(MP på 2 og 3)
5	$(\neg\alpha \Rightarrow \neg\beta) \Rightarrow \alpha$	(MP på 1 og 4)
6	$\neg\beta$	(den anden af præmisserne)
7	$\neg\beta \Rightarrow (\neg\alpha \Rightarrow \neg\beta)$	(I med $\neg\beta$ som α og $\neg\alpha$ som β)
8	$\neg\alpha \Rightarrow \neg\beta$	(MP på 6 og 7)
9	α	(MP på 5 og 8).

□

Udledningen i eksemplet viser, at man ud fra en formel og dens negation kan udlede en hvilken som helst formel. Hvis der ud fra en mængde af $\mathcal{L}_1$-formler Φ kan udledes både en $\mathcal{L}_1$-formel og dens negation, er Φ **inkonsistent** i **H**, da negationen af en formel betragtes som en modsigelse af formlen selv. Hvis mængden ikke er inkonsistent, er den **konsistent** i **H**. Hvis den tomme mængde er konsistent i **H**, siges det, at **H** er konsistent.

2.2.8 SÆTNING. En mængde af formler Φ er inkonsistent, hviss det for enhver formel α gælder, at $\Phi \vdash \alpha$.

BEVIS. Hvis Φ er inkonsistent, vil der ifølge definitionen eksistere en formel β, hvorom det gælder, at $\Phi \vdash_{\mathbf{H}} \beta$ og $\Phi \vdash_{\mathbf{H}} \neg\beta$. Ifølge eksemplet ovenfor vil enhver formel kunne udledes af β og $\neg\beta$. Af dette følger det, at $\Phi \vdash_{\mathbf{H}} \alpha$ for enhver formel α. Omvendt, hvis alle formler kan udledes fra Φ, vil Φ i hvert fald kunne udlede α og $\neg\alpha$, hvorfor Φ er inkonsistent. ■

Hvis der således kan findes en formel, som ikke kan bevises i **H**, er det vist, at prædikatlogikken er konsistent.[11] Problemet med denne metode er, at det er svært at vide, om en formel ikke kan bevises, da det er umuligt at efterprøve alle mulighederne for et eventuelt bevis. Men en konsistent mængde er i besiddelse af følgende egenskab:

2.2.9 SÆTNING. En mængde af formler Φ er konsistent, hviss enhver endelig delmængde af Φ er konsistent.

BEVIS. Hvis en delmængde af Φ er inkonsistent, må Φ også selv være inkonsistent. Heraf følger, at hvis Φ er konsistent skal enhver[12] delmængde af Φ være konsistent. Hvis Φ er inkonsistent, må en formel og dens negation kunne udledes fra Φ i et endeligt antal skridt. Derfor må der være en endelig delmængde af Φ, der er inkonsistent. Heraf følger, at hvis enhver endelig delmængde af Φ er konsistent, vil Φ selv være konsistent. ■

2.2.10 SÆTNING. Den tomme mængde er konsistent i 1. ordens prædikatlogikken. Heraf følger, at 1. ordens prædikatlogikken er konsistent.

Vi viser ikke sætningen men nøjes med at anskueliggøre et bevis. Et bevis for konsistensen af 1. ordens prædikatlogikken kan gives ved at vise, at hvis der findes en $\mathcal{L}_1$-formel α, så både α og $\neg\alpha$ er **H**-formler, så vil ikke blot prædikatlogikken, men også udsagnslogikken[13] være inkonsistent.[14] Da prædikatlogikken er en konservativ udvidelse af udsagnslogikken, kan vi nøjes med at vise, at

[11] Det var denne egenskab ved et inkonsistent system, Hilbert gjorde brug af i id,en til sit konsistensbevis. Kunne han blot vise, at en hvilken som helst formel (f. eks. $0 \neq 0$) ikke kunne udledes, havde han vist, at systemet var konsistent.

[12] Ikke nødvendigvis endelig.

[13] Udsagnslogikken består af aksiom I–III, slutningsreglen MP og har som eneste logiske symboler $\Rightarrow$ og $\neg$.

[14] Se [BELL & MACHOVER, 1977; p. 114] for beviset.

udsagnslogikken er konsistent. Dette involverer den såkaldte **tableaumetode**.[15]

Tableaumetoden, der har mange lighedspunkter med Gentzens logiske kalkyle (gennemgås i afsnit 2.3), kan blandt andet bruges til at vise, at en mængde af formler er inkonsistent. Et sådant resultat ved brug af tableaumetoden går dog via semantikken, som det næste afsnit handler om. Derfor undlader vi at komme ind på de tekniske aspekter omkring metoden her. Metoden har bla. den fordel, at den er nem og systematisk at bruge, samt at den inden for udsagnslogikken er strengt konstruktiv, hvorfor den giver en garanti for at kunne afgøre, om en mængde af formler er inkonsistent eller ej. Et bevis for konsistensen af udsagnslogikken etableres nemt med tableauerne, hvoraf det følger, at 1. ordens prædikatlogikken også er konsistent.

Vi vil dog i næste afsnit, gennem nogle semantiske argumenter, redegøre for at 1. ordens prædikatlogikken er konsistent.[16] Først skal vi dog lige have nogle begreber omkring fuldstændighed præciseret.

En mængde af $\mathcal{L}_1$-formler Φ er **syntaktisk fuldstændig** i **H**, hvis det for alle $\mathcal{L}_1$-formler α gælder, at α eller $\neg\alpha$ kan udledes af Φ. Mængden Φ er **syntaktisk ufuldstændig** i **H**, hvis den ikke er syntaktisk fuldstændig. Egenskaber ved den syntaktiske ufuldstændighed af Peano aritmetikken undersøges med GÖdels ufuldstændighedssætninger, der behandles i kapitel 3. Det er normalt ikke den syntaktiske fuldstændighed, systemer undersøges for, men derimod den **semantiske fuldstændighed**, der, på trods af næsten samme navn, adskiller sig fundamentalt fra den syntaktiske. Et bevis af den semantiske fuldstændighed af 1. ordens prædikatlogik afslutter næste afsnits semantiske gennemgang af prædikatlogikken.

2.2.2 Semantik

En semantisk behandling af sproget $\mathcal{L}_1$ er at tillægge enhver $\mathcal{L}_1$-term og $\mathcal{L}_1$-formel mening, hvilket gøres gennem en sandhedstildeling af hver enkelt $\mathcal{L}_1$-formel. Sproget bruges til at beskrive strukturer, hvorfor det defineres, hvorledes $\mathcal{L}_1$ ved en interpretation σ føres over på en given struktur $\mathfrak{U}$.

2.2.11 Definition. **$\mathcal{L}_1$-strukturen** $\mathfrak{U}$ indeholder en ikke-tom klasse $\mathcal{U}$, der kaldes strukturens univers. Til ethvert n-ary prædikatsymbol $P(x_1, \ldots, x_n)$ i $\mathcal{L}_1$ hører der en afbildning, så $P^\sigma(u_1, \ldots, u_n)$ er en delmængde $\mathcal{U}^n$ og hvor $u_i \in \mathcal{U}$. Ligeledes føres ethvert n-ary funktionssymbol $f(x_1, \ldots, x_n)$ i $\mathcal{L}_1$ over i $f^\sigma(u_1, \ldots, u_n)$, der er en operation fra $\mathcal{U}^n$ til $\mathcal{U}$, hvor $u_i \in \mathcal{U}$. $\square$

Det følger, som eksempler på definitionen, at hvis P er et 1-ary prædikatsymbol, så er P^σ en delmængde af $\mathcal{U}$, og hvis f er et 0-ary funktionssymbol, dvs. en konstant, er f^σ et element i $\mathcal{U}$.

Når $\mathcal{L}_1$-strukturen er defineret, resterer en enkelt procedure, før alle $\mathcal{L}_1$-formler kan tildeles sandhedsværdier. I afsnit 2.1 defineredes bestemmelige $\mathcal{L}_1$-formler som formler, der ikke indeholder frie variable. Første skridt mod at gøre $\mathcal{L}_1$-formler, der er ubestemmelige, til bestemmelige formler er ved at foretage en **variabeltilskrivning**. En variabeltilskrivning tildeler enhver fri variabel i $\mathcal{L}_1$-formlerne et element i $\mathcal{U}$. Hvis x tildeles elementet u_1 i $\mathcal{U}$, skrives $x^\sigma = u_1$.

Med dette giver det mening at skrive $P^\sigma(u_1, \ldots, u_n)$ i $\mathfrak{U}$ som $P^\sigma(x_1^\sigma, \ldots, x_n^\sigma)$ og tilsvarende $f^\sigma(u_1, \ldots, u_n)$ som $f^\sigma(x_1^\sigma, \ldots, x_n^\sigma)$.

Vi definerer nu en **interpretation** σ af $\mathcal{L}_1$ til at bestå af $\mathcal{L}_1$-strukturen $\mathfrak{U}$ samt en variabeltilskrivning af $\mathcal{L}_1$-variable.

[15] En grundig beskrivelse af tableaumetoden findes i [Bell & Machover, 1977; pp. 25].

[16] Beviset bliver pga. de semantiske definitioner ikke-konstruktivt, da $\forall$-kvantoren løber over et uendeligt domæne.

Tarskis sandhedsdefinition

Med interpretationen σ kan vi rekursivt definere, hvorledes enhver $\mathcal{L}_1$-term tildeles en værdi, idet σ gennem en variabeltilskrivning allerede har tildelt alle frie variable en værdi.

2.2.12 Definition. Hvis f er et n-ary funktionssymbol i $\mathcal{L}_1$ og $t_1, \ldots, t_n$ er $\mathcal{L}_1$-termer så er $(f(t_1, \ldots, t_n))^\sigma = f^\sigma(t_1^\sigma, \ldots, t_n^\sigma)$. □

Det må antages, at afbildningen af funktionssymbolerne over i operationerne er udformet, så det for alle $\mathcal{L}_1$-termer t gælder, at t^σ tilhører $\mathcal{U}$. $\mathfrak{U}$ skal med andre ord være lukket med hensyn til enhver operator.[17]

Med denne definition er alle $\mathcal{L}_1$-formler bestemmelige under en interpretation, og der er nu basis for at tildele alle $\mathcal{L}_1$-formler en sandhedsværdi. Der skelnes i det følgende mellem to sandhedsværdier; **sand**, der betegnes $\top$, og **falsk** $\perp$.[18] Enhver $\mathcal{L}_1$-formel tildeles derfor enten værdien $\top$ eller $\perp$, og vi definerer kun den semantiske betydning af $\mathcal{L}_1$-formler, der indeholder de logiske symboler $\neg$, $\Rightarrow$ og $\forall$.

[17] Hvis $\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$ og eneste operation på $\mathcal{U}$ er addition, da er $\mathfrak{U}$ ikke lukket under operatoren $+$.

[18] Man siger derfor, at prædikatlogikken er en divalent logik.

2.2.13 DEFINITION. Hvis P er et n-ary prædikatsymbol i $\mathcal{L}_1$, og $t_1, \ldots, t_n$ er $\mathcal{L}_1$-termer, så er

$$(P(t_1, \ldots, t_n))^\sigma = \top \quad \text{hviss} \quad \langle t_1^\sigma, \ldots, t_n^\sigma \rangle \in P^\sigma.$$

Nu har alle atomiske $\mathcal{L}_1$-formler fået en sandhedsværdi. Da $\mathcal{L}_1$ indeholder lighedssymbolet vil dette prædikat defineres eksplicit. Hvis t_1 og t_2 er $\mathcal{L}_1$-termer, er

$$(t_1 = t_2)^\sigma = \top \quad \text{hviss} \quad t_1^\sigma = t_2^\sigma.$$ [19]

Hvis β er en $\mathcal{L}_1$-formel, er

$$(\neg\beta)^\sigma = \top \quad \text{hviss} \quad \beta^\sigma = \bot.$$

Hvis β og γ begge er $\mathcal{L}_1$-formler, så er

$$(\beta \Rightarrow \gamma)^\sigma = \top \quad \text{hviss} \quad \beta^\sigma = \bot \text{ eller } \gamma^\sigma = \top.$$ □

Formler på formen $\forall x\beta$ er mere komplicerede at tildele sandhedsværdier, da alle mulige tildelinger af variablen x, dvs. hele $\mathcal{U}$, skal gennemprøves, mens evt. andre variable i β samtidigt skal antage deres af σ bestemte værdi. For at kunne udføre denne procedure må en ny interpretation defineres ud fra σ.

2.2.14 DEFINITION. Lad σ være en interpretation med univers $\mathcal{U}$ og lad u_1 være et element i $\mathcal{U}$. Da er $\sigma(x/u_1)$ den interpretation, hvor x tildeles værdien u_1, og alle andre variable har samme værdi som under σ. Det skal desuden gælde, at σ og $\sigma(x/u_1)$ er ens på alle funktionssymboler og prædikatsymboler, hvorved termer og formler, der ikke indeholder x, vil tildeles samme værdi under σ og $\sigma(x/u_1)$.

Hvis β er en $\mathcal{L}_1$-formel vil

$$(\forall x\beta)^\sigma = \top \quad \text{hviss} \quad \beta^{\sigma(x/u)} = \top \text{ for alle } u \in \mathcal{U}.$$ □

I β gennemløber x alle mulige værdier i universet, mens $\sigma(x/u)$ sørger for, at alle andre variable og termer holdes fast på deres af σ dikterede værdi.

De tre definitioner 2.2.12, 2.2.13 og 2.2.14 kaldes tilsammen Tarski's sandhedsdefinition (TS), da det var Tarski, der i 1933 gav den første formulering af definitionerne.[20]

Der kan nu skelnes mellem, om en $\mathcal{L}_1$-formel er sand eller falsk under interpretationen σ og TS.

For en $\mathcal{L}_1$-formel skriver vi $\sigma \models \alpha$, hviss $\alpha^\sigma = \top$. Det siges, at σ **tilfredsstiller** α. Tilsvarende hvis Φ er en mængde af $\mathcal{L}_1$-formler vil $\sigma \models \Phi$, hviss $\varphi^\sigma = \top$ for alle formler φ i Φ.

Begrebet **logisk konsekvens**, der nu kan introduceres, har stor betydning, da det karakteriserer en form for semantisk slutning, dvs. en sandhedsbevarede overgang fra ‚n eller flere formler til en ny. Hvis det for enhver σ gælder, at $\alpha^\sigma = \top$ medfører at $\beta^\sigma = \top$, da er β en logisk konsekvens af α. Tilsvarende er β en logisk konsekvens af Φ, hvis det for enhver interpretation gælder, at $\varphi^\sigma = \top$ for enhver formel φ i Φ medfører, at $\beta^\sigma = \top$. Dette skrives $\Phi \models \beta$.

Hvis $\alpha^\sigma = \top$ for enhver σ, kaldes α **logisk sand**. Det må derfor gælde, at hvis α er logisk sand og β er en logisk konsekvens af α, så må β også være logisk sand. Det, at en $\mathcal{L}_1$-formel α er sand under alle interpretationer, skrives $\models \alpha$.

Logisk konsekvens $\models$ hænger i $\mathcal{L}_1$ tæt sammen med beviselighed $\vdash_{\mathbf{H}}$, der blev defineret i afsnit 2.2.1. Dette redegører vi for i det følgende; først gennem begrebet **sundhed** og dernæst gennem den **semantiske fuldstændighed**.

Sundhed af H

Hvis det for enhver formel α, vi i $\mathbf{H}$ kan bevise ud fra en mængde af præmisser Φ, gælder, at α er en logisk konsekvens af Φ, siger vi, at $\mathbf{H}$ er (semantisk) sund.

2.2.15 SÆTNING. Hvis $\Phi \vdash_{\mathbf{H}} \alpha$ så $\Phi \models \alpha$.

[19] Bemærk, at der er forskel på de tre lighedstegn i sætningen. Det første betegner lighedssymbolet i $\mathcal{L}_1$, det andet er blot et hjælpesymbol i det sprog, som rapporten er skrevet i, mens det tredie er identitetsrelationen '$=^\sigma$' i $\mathfrak{U}$.

[20] [BELL & MACHOVER, 1977; p. 52].

Bevis. Vi skal vise, at aksiomerne i **H** er logisk sande samt, at MP er sandhedsbevarende. Kan vi vise dette, vil det følge, at enhver formel, vi kan bevise ud fra en mængde af præmisser, vil være en logisk konsekvens af disse.

Her viser vi blot, at tre af de ti aksiomer er logisk sande, da det for dem alle gælder, at argumenterne er simple. Aksiom I er ifølge TS sand, hviss $\alpha^\sigma = \bot$ eller $(\beta \Rightarrow \alpha)^\sigma = \top$. $(\beta \Rightarrow \alpha)^\sigma = \top$, hviss $\beta^\sigma = \bot$ eller $\alpha^\sigma = \top$. Aksiom I er således sand, hviss $\alpha^\sigma = \bot$ eller $\beta^\sigma = \bot$ eller $\alpha^\sigma = \top$. Dette må være opfyldt for alle σ, da det altid gælder, at enten er $\alpha^\sigma = \bot$ eller $\alpha^\sigma = \top$.

Aksiom V er sand, hviss $\alpha^\sigma = \bot$ eller $(\forall x\alpha)^\sigma = \top$. Hvis x er bundet i α, gælder det, at $\alpha^{\sigma(x/u)} = \alpha^\sigma$, hvorfor det gælder at, $(\forall x\alpha)^\sigma = \top$, hviss $\alpha^\sigma = \top$. Heraf ser vi, at aksiom V er sand, hviss $\alpha^\sigma = \bot$ eller $\alpha^\sigma = \top$, hvilket er opfyldt under alle σ.

Efter anvendelse af TS for det logiske symbol $\Rightarrow$ gentagne gange ses det, at aksiom VIII er sand, hviss

$$(t_1 = t_{n+1})^\sigma = \bot \quad \text{eller} \quad (t_2 = t_{n+2})^\sigma = \bot \quad \text{eller} \ldots$$

$$\text{eller} \quad (t_n = t_{2n})^\sigma = \bot \quad \text{eller} \quad (f(t_1, \ldots, t_n) = f(t_{n+1}, \ldots, t_{2n}))^\sigma = \top.$$

At aksiom VIII er en logisk sand $\mathcal{L}_1$-formel vises ved et modstridsargument. Antag, at der findes en σ, så aksiomet er falsk. Dette er opfyldt, hviss

$$(t_1 = t_{n+1})^\sigma = \top \quad \text{og} \quad (t_2 = t_{n+2})^\sigma = \top \quad \text{og} \ldots$$

$$\text{og} \quad (t_n = t_{2n})^\sigma = \top \quad \text{og} \quad (f(t_1, \ldots, t_n) = f(t_{n+1}, \ldots, t_{2n}))^\sigma = \bot,$$

hvilket ved brug af TS kan omskrives til

$$t_1^\sigma = t_{n+1}^\sigma \quad \text{og} \ldots \text{og} \quad t_n^\sigma = t_{2n}^\sigma \quad \text{og} \quad f^\sigma(t_1^\sigma, \ldots, t_n^\sigma) \neq f^\sigma(t_{n+1}^\sigma, \ldots, t_{2n}^\sigma).$$

Betragt nu $f^\sigma(t_1^\sigma, \ldots, t_n^\sigma)$. t_{n+1}^σ må kunne substitueres ind i stedet for t_1^σ, da de som før vist, betegner samme individ fra universet. Tilsvarende argument gælder til og med t_{2n}^σ, der kan substitueres ind i stedet for t_n^σ i f^σ. Efter udskiftning på samtlige pladser fås, at

$$f^\sigma(t_1^\sigma, \ldots, t_n^\sigma) = f^\sigma(t_{n+1}^\sigma, \ldots, t_{2n}^\sigma),$$

hvilket er i modstrid med kravet om, at de to udtryk ikke er lig hinanden.

Der resterer nu at gøre rede for, at MP er sandhedsbevarende. Hvis $\alpha^\sigma = \top$ og $(\alpha \Rightarrow \beta)^\sigma = \top$ følger det, at $\beta^\sigma = \top$, da $(\alpha \Rightarrow \beta)$ ellers bliver falsk. ∎

Som et specialtilfælde af sundheden af **H** følger det, at alle **H**-formler er logisk sande. Dette er netop tilfældet, hvor mængden af præmisser Φ er tom. Det vil sige $\vdash_{\mathbf{H}} \alpha$ medfører $\models \alpha$.

2.2.16 Sætning. Sundhed af **H** medfører konsistens af **H**.

Bevis. Antag, at **H** er inkonsistent, dvs. at der findes en $\mathcal{L}_1$-formel α, hvorom det gælder, at $\vdash_{\mathbf{H}} \alpha$ og $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\alpha$. Da **H** er sund medfører dette, at $\models \alpha$ og $\models \neg\alpha$, hvilket medfører, at det for alle interpretationer må gælde, at $\alpha^\sigma = \top$ og $\alpha^\sigma = \bot$, hvilket er en klar modstrid. Det vil sige da **H** er sund, er **H** også konsistent. ∎

Fuldstændighed af H

Givet en mængde af præmisser Φ siger vi, at hvis vi i **H** kan bevise alle de logiske konsekvenser af Φ, da er **H** semantisk fuldstændig. En mere formel definition af semantisk fuldstændighed lyder:

2.2.17 Definition. **H** er **semantisk fuldstændig**, hvis $\Phi \models \alpha$ medfører $\Phi \vdash_{\mathbf{H}} \alpha$. □

For at vi kan vise, at **H** er fuldstændig, dvs. at $\mathcal{L}_1, \vdash_{\mathbf{H}}$ og $\models$ danner et semantisk fuldstændigt system, indfører vi begrebet **model**.

2.2.18 Definition. En mængde af $\mathcal{L}_1$-formler Φ har en model, hviss der findes en interpretation, σ, hvorunder alle formler i Φ er sande. □

Der findes to ækvivalente formuleringer af semantisk fuldstændighed. Den første gav vi i definition 2.2.17. Den anden ses som et resultat af tableaumetoden (som vi nævnte i afsnit 2.2.1). Her siges det, at enhver endelig konsistent mængde af formler har en model med et tælleligt univers. Dette er en modelteoretisk indgangsvinkel. Faktisk er tableaumetodens hovedresultat en sætning, der fastslår, at en endelig mængde af $\mathcal{L}_1$-formler er inkonsistent, hviss den ikke har en model.[21] Med denne sætning giver tableaumetoden i prædikatlogikken en metode til at afgøre, om en endelig mængde af $\mathcal{L}_1$-formler er inkonsistent eller ej. Metoden er konstruktiv i de tilfælde, hvor modellens univers er endeligt, men er universet uendeligt, bliver metoden ikke-konstruktiv, da det ikke længere kan garanteres, at man bliver færdig i sin undersøgelse af en given mængde af $\mathcal{L}_1$-formler. Den første formulering udtrykker en mere bevisteoretisk indgangsvinkel, da den sammenkæder $\vdash_{\mathbf{H}}$ og $\models$ i $\mathcal{L}_1$. Men de to formuleringer er ækvivalente, hvilket vi anskueliggør ved at benytte tableaumetodens resultat til et bevis af følgende sætning.

2.2.19 Sætning. Hvis $\Phi \models \alpha$ så $\Phi \vdash_{\mathbf{H}} \alpha$; specielt vil $\models \alpha$ medføre $\vdash_{\mathbf{H}} \alpha$.

Bevis. Vi nøjes med at vise tilfældet, hvor Φ er tom; nemlig at hvis α er logisk sand, så er α en **H**-formel.

Hvis $\models \alpha$ er α sand under alle interpretationer. $\neg\alpha$ kan ikke have nogen model, da $(\neg\alpha)^\sigma = \perp$ for enhver interpretation σ. Af tableaumetoden følger det, at $\{\neg\alpha\}$ er inkonsistent i **H**. Vi har i afsnit 2.2.1 vist, at ud fra en inkonsistent mængde af $\mathcal{L}_1$-formler kan enhver $\mathcal{L}_1$-formel udledes. Det må derfor gælde, at $\neg\alpha \vdash_{\mathbf{H}} \alpha$, hvorefter deduktionssætningen (sætning 2.2.6 i afsnit 2.2.1) giver, at $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\alpha \Rightarrow \alpha$. Vi viser nu, at $\neg\alpha \Rightarrow \alpha \vdash_{\mathbf{H}} \alpha$.

1	$\neg\alpha \Rightarrow \alpha$	(præmis)
2	$(\neg\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \big((\neg\alpha \Rightarrow \neg\alpha) \Rightarrow \alpha\big)$	(iii)
3	$(\neg\alpha \Rightarrow \neg\alpha) \Rightarrow \alpha$	(MP på 1 og 2)
4	$\neg\alpha \Rightarrow \neg\alpha$	(kan indsættes som præmis, da $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\alpha \Rightarrow \neg\alpha$)
5	α	(MP på 3 og 4).

At $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\alpha \Rightarrow \neg\alpha$ er vist i beviset for deduktionssætningen. Da $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\alpha \Rightarrow \alpha$ og $\neg\alpha \Rightarrow \alpha \vdash_{\mathbf{H}} \alpha$ får vi et bevis af $\vdash_{\mathbf{H}} \alpha$ ved at lægge de to beviser i forlængelse af hinanden. ■

Fuldstændighed sammen med sundhed garanterer, at en $\mathcal{L}_1$-formel er logisk sand, hviss den kan bevises i **H**. Dette betyder, at vi i **H** lige netop kan bevise de formler, der er logisk sande.

Sproget $\mathcal{L}_1$, den bevisteoretiske følgerelation $\vdash_{\mathbf{H}}$ og den semantiske følgerelation $\models$ kaldes tilsammen **1. ordens prædikatlogik**, da $\mathcal{L}_1$ er et 1. ordens sprog indeholdende prædikatsymboler. Da vi med sundhed og fuldstændighed af **H** har vist ækvivalensen mellem $\vdash_{\mathbf{H}}$ og $\models$, siger vi, at **H** er i besiddelse af en **bevisstruktur**.

[21] Sætningen med tilhørende bevis findes i [Bell & Machover, 1977; pp. 115].

2.3 Sekventkalkylen $\mathbf{G_e}$

I dette afsnit præsenteres først Gentzens formulering af 1. ordens prædikatkalkylen med lighed, som betegnes $\mathbf{G_e}$. Kalkylen $\mathbf{G_e}$ ligner umiddelbart ikke $\mathbf{H}$. Hvor $\mathbf{H}$ er opbygget med ti aksiomer og kun ‚n slutningsregel (Modus Ponens), er $\mathbf{G_e}$ stykket sammen af fire aksiomer og en længere række udledningsregler. Det anskueliggøres efter opbygningen af $\mathbf{G_e}$, at de to formuleringer er ækvivalente, dvs. at alle formler, der kan bevises i $\mathbf{G_e}$, kan bevises i $\mathbf{H}$ og omvendt.

Styrken ved $\mathbf{H}$ kommer til udtryk i modelteorien, hvor forholdet mellem 1. ordens sætninger og de strukturer, hvori de er tilfredsstillet, studeres. $\mathbf{G_e}$ finder derimod sin styrke i forhold til bevisteorien, da udledninger, og dermed syntaktiske beviser, er nemmere at udføre i $\mathbf{G_e}$ end i $\mathbf{H}$. Dette skyldes, at beviser i $\mathbf{G_e}$ formmæssigt ligner dagligdagens beviser noget mere end de endelige følger af formler, der præsenteres i Hilbertstilen.

2.3.1 Sekventer

2.3.1 Definition. En **sekvent** er på formen $\Gamma \rightarrow \Delta$, hvor Γ og Δ, adskilt af hjælpesymbolet $\rightarrow$, repræsenterer endelige (evt. tomme) følger af formler. Γ kaldes for **antecedenten** og Δ for **succedenten**. □

2.3.2 Eksempel. De følgende to udtryk er begge eksempler på sekventer.

- $\rightarrow \alpha, \neg\alpha$
- $P_1(x), P_1(x) \Rightarrow P_2(x) \rightarrow P_2(x)$

Det er her uden betydning, hvad sekventen udtrykker under en given interpretation, da den blot skal overholde de syntaktiske krav fra definition 2.3.1. □

2.3.3 Definition. En formel i en sekvent siges at være tilfredsstillet under en interpretation, hviss den er sand under Tarski's sandhedsdefinition (TS). En sekvent er falsk, hviss alle antecedentformler er sande og alle succedentformler er falske under samme interpretation. Dette vil altså sige, at en sekvent er sand, hvis blot ‚n af antecedentformlerne er falske eller ‚n af succedentformlerne er sande. □

Den semantiske definition af sekventer lægger op til følgende to intuitive forståelser af en sand sekvent $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \rightarrow \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$:

1. Af 2.3.3 følger, at hvis alle antecedenterne α_i er sande, så er mindst ‚n af succedenterne β_k sand, hvis sekventen er sand. Dette svarer til begrebet logisk konsekvens i $\mathbf{H}$, der ifølge fuldstændigheden af $\mathbf{H}$ er ækvivalent med bevislighed. Sekventen kan da tolkes: Givet præmisserne $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ kan mindst ‚n af sætningerne $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ udledes. Med betegnelsen for bevis i Hilbertstil $\vdash_{\mathbf{H}}$, kan tolkningen skrives $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\} \vdash_{\mathbf{H}} \beta_1$ eller $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\} \vdash_{\mathbf{H}} \beta_2$ eller ... eller $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\} \vdash_{\mathbf{H}} \beta_n$. Så generelt kan sekventer opfattes som udsagn om beviser i $\mathbf{H}$, hvorfor der i $\mathbf{G_e}$ er tale om 'rigtig' bevisteori.
2. Igen gælder det, at hvis alle antecedentformler er sande under en interpretation, er mindst ‚n af succedentformlerne sande for en sand sekvent. Dette betyder, at den semantiske tolkning af sekventen er den samme som for $\mathcal{L}_1$-formlen $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_m \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2 \vee \cdots \vee \beta_n$ under TS.

Vi siger, at en sekvent er **tilfredsstillet**, hviss den er sand under en interpretation σ. Hvis en sand sekvent S_1 medfører, at en sekvent S_2 er sand, siger vi, at S_2 er en **logisk konsekvens** af S_1. Sekventen $\Gamma \rightarrow \Delta$ er **logisk sand**, hviss den er sand under alle interpretationer σ.

2.3.2 Slutningsregler i $\mathbf{G_e}$

En **slutning** er et udtryk på formen

$$\frac{S_1}{S} \quad \text{eller} \quad \frac{S_1 \quad S_2}{S} \tag{2.1}$$

hvor S_1, S_2 og S er ikke-tomme sekventer. S_1 og S_2 kaldes slutningens **øvre sekventer** og S slutningens **nedre sekvent**. Intuitivt forstås en slutning som, at under antagelse af ‚n eller flere øvre sekventer kan en nedre udledes.

Vi præsenterer i det følgende de slutningsregler, vi vil tillade i $\mathbf{G_e}$. Som tidligere betegner α og β enkeltstående formler, mens Γ, Δ, Π og Λ udtrykker endelige følger af formler, dvs. hhv. $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_l$, $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ og $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, hvor k, l, m og n er naturlige tal.

2.3.4 Definition. **Strukturelle slutningsregler**
De strukturelle slutningsregler kaldes venstre- eller højreregler alt efter, om reglen virker på antecedenten eller succedenten af sekventen. I det følgende vil $_v$ og $_h$ betegne henholdsvis venstre- og højreregler.

Udtynding:

$$U_v : \frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{\alpha, \Gamma \rightarrow \Delta} \qquad U_h : \frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, \alpha} \tag{2.2}$$

Kontraktion:

$$K_v : \frac{\alpha, \alpha, \Gamma \rightarrow \Delta}{\alpha, \Gamma \rightarrow \Delta} \qquad K_h : \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, \alpha, \alpha}{\Gamma \rightarrow \Delta, \alpha} \tag{2.3}$$

Ombytning:

$$O_v : \frac{\Gamma, \alpha, \beta, \Pi \rightarrow \Delta}{\Gamma, \beta, \alpha, \Pi \rightarrow \Delta} \qquad O_h : \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, \alpha, \beta, \Lambda}{\Gamma \rightarrow \Delta, \beta, \alpha, \Lambda} \tag{2.4}$$

Snit:

$$Sn : \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, \alpha \qquad \alpha, \Pi \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi \rightarrow \Delta, \Lambda} \tag{2.5}$$

Formlen α i snitreglen kaldes **snitformlen**. Vi definerer **graden** af en formel, α, til at være antallet af logiske symboler i α. Dette betegnes $grad(\alpha)$. Graden af et snit er graden af snitformlen. □

Ved en undersøgelse af, om disse regler virker fornuftige og meningsfyldte, ses på de semantiske forhold omkring reglerne. Vi undersøger, om systemet er sundt, dvs. om den nedre sekvent i en slutningsregel er en logisk konsekvens af den eller de øvre. Dette kan i praksis gøres ved at antage, at den øvre sekvent er sand og vise, at da er den nedre også sand; eller ved at antage, at den nedre sekvent er falsk og derefter vise, at under denne antagelse vil den øvre sekvent også være falsk.

I de følgende eksempler på semantiske overvejelser over slutningsreglerne tages der mht. sekventerne og formler udgangspunkt i definition 2.3.3.

2.3.5 Eksempel. For overskuelighedens skyld lader vi Γ, Δ, Π og Λ være følger bestående af ‚n formel, hhv. $\gamma_1, \delta_1, \pi_1$ og λ_1. De kommende argumenter lader sig nemt generalisere til situationer, hvor følgerne består af flere formler.

I U_v er den øvre sekvent $\gamma_1 \rightarrow \delta_1$ sand, hviss $\gamma_1^\sigma = \bot$ eller $\delta_1^\sigma = \top$. Den nedre sekvent er sand, hviss $\alpha^\sigma = \bot$ eller $\gamma_1^\sigma = \bot$ eller $\delta_1^\sigma = \top$. Heraf følger, at givet den øvre sekvent er sand, vil den nedre sekvent være sand.

I U_h er den nedre sekvent $\gamma_1 \to \delta_1$ falsk, hviss $\gamma_1^\sigma = \top$, $\delta_1^\sigma = \bot$ og $\alpha_1^\sigma = \bot$. Da den øvre sekvent vil være falsk, hviss $\gamma^\sigma = \top$ og $\delta_1^\sigma = \bot$, ses det, at givet den nedre sekvent er falsk, vil den øvre sekvent være falsk.

Tilsvarende argumenter bruges for kontraktions- og ombytningsreglen, hvorfor K_v, K_h, O_v og O_h ikke gennemgås.

Snitreglen er en speciel strukturel slutningsregel, da der optræder to øvre sekventer. Antag, at den nedre sekvent ikke er en logisk konsekvens af de øvre. De øvre sekventer er sande, hviss ($\gamma_1^\sigma = \bot$ eller $\delta_1^\sigma = \top$ eller $\alpha^\sigma = \top$) og ($\alpha^\sigma = \bot$ eller $\pi_1^\sigma = \bot$ eller $\lambda_1^\sigma = \top$). Den nedre sekvent er falsk, hviss $\gamma_1^\sigma = \top$ og $\pi_1^\sigma = \top$ og $\delta_1^\sigma = \bot$ og $\lambda_1^\sigma = \bot$. Antag, at den nedre sekvent er falsk, da vil vi få en modstrid, hvis den øvre skulle være sand, da α^σ både skulle være sand og falsk. Da dette er i modstrid med TS, må den nedre sekvent være en logisk konsekvens af de øvre. $\square$

2.3.6 DEFINITION. **Udsagnslogiske slutningsregler.**
Vi indfører nu slutningsregler tilhørende de udsagnslogiske symboler. Strengt taget er det kun nødvendigt med regler for $\neg$ og $\Rightarrow$, men vi medtager også – som ikke-basale slutningsregler – regler for $\wedge$ og $\vee$, da det letter den praktiske brug af kalkylen. De udsagnslogiske slutningsregler kaldes højre- eller venstreregler, alt efter om det udsagnslogiske symbol introduceres i succedenten eller antecedenten af den nedre sekvent i reglen.

$$\neg_v\text{:}\ \frac{\Gamma \to \Delta, \alpha}{\neg\alpha, \Gamma \to \Delta} \qquad\qquad \neg_h\text{:}\ \frac{\alpha, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg\alpha}$$

$$\wedge_v\text{:}\ \frac{\alpha, \Gamma \to \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \to \Delta} \ \text{og}\ \frac{\beta, \Gamma \to \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \to \Delta} \qquad \wedge_h:\ \frac{\Gamma \to \Delta, \alpha \quad \Gamma \to \Delta, \beta}{\Gamma \to \Delta, \alpha \wedge \beta}$$

$$\vee_v\text{:}\ \frac{\alpha, \Gamma \to \Delta \quad \beta, \Gamma \to \Delta}{\alpha \vee \beta, \Gamma \to \Delta} \qquad \vee_h:\ \frac{\Gamma \to \Delta, \alpha}{\Gamma \to \Delta, \alpha \vee \beta} \ \text{og}\ \frac{\Gamma \to \Delta, \beta}{\Gamma \to \Delta, \alpha \vee \beta}$$

$$\Rightarrow_v:\ \frac{\Gamma \to \Delta, \alpha \quad \beta, \Pi \to \Lambda}{\alpha \Rightarrow \beta, \Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda} \qquad \Rightarrow_h:\ \frac{\alpha, \Gamma \to \Delta, \beta}{\Gamma \to \Delta, \alpha \Rightarrow \beta}$$

De formler, som i ovenstående regler indeholder det indførte konnektiv, kaldes slutningsreglens **principalformel**. □

Ligesom for de strukturelle slutningsregler gennemgås for nogle af de udsagnslogiske slutningsregler en semantisk verifikation af, at den nedre sekvent er en logisk konsekvens af den eller de øvre.

2.3.7 EKSEMPEL. Da negationsreglen er simpel udelades $\neg_v$ og $\neg_h$ i gennemgangen. Af de seks øvrige forklares kun $\wedge_v$ og $\Rightarrow_h$, da gennemgangen af de resterende regler følger samme princip.

$\wedge_v$ består af to regler. I den første er den øvre sekvent sand, hviss $\alpha^\sigma = \bot$ eller $\gamma_1^\sigma = \bot$ eller $\delta_1^\sigma = \top$. Den nedre sekvent er sand, hviss $(\alpha \wedge \beta)^\sigma = \bot$ eller $\gamma_1^\sigma = \bot$ eller $\delta_1^\sigma = \top$. Dette er ifølge TS tilfældet, hviss $\alpha^\sigma = \bot$ eller $\beta^\sigma = \bot$ eller $\gamma_1^\sigma = \bot$ eller $\delta_1^\sigma = \top$, hvilket er opfyldt, hvis den øvre sekvent er sand. Den anden regel kan beskrives på samme måde, hvor man blot erstatter α med β og β med α.

I $\Rightarrow_h$ vil den øvre sekvent være sand, hviss $\alpha^\sigma = \bot$ eller $\gamma_1^\sigma = \bot$ eller $\delta_1^\sigma = \top$ eller $\beta^\sigma = \top$. Den nedre sekvent er sand, hviss $\gamma_1^\sigma = \bot$ eller $\delta_1^\sigma = \top$ eller $(\alpha \Rightarrow \beta)^\sigma = \top$, hvilket svarer til at $\gamma_1^\sigma = \bot$ eller $\delta_1^\sigma = \top$ eller $\alpha^\sigma = \bot$ eller $\beta^\sigma = \top$. Det følger heraf, at under antagelse af, at den øvre sekvent er sand, vil den nedre også være det. □

2.3.8 DEFINITION. **Kvantoriske slutningsregler.**
Vi har i de tidligere afsnit brugt betegnelsen $\alpha(x/t)$ for, at enhver fri forekomst af x substitueres med termen t. I det følgende benytter vi som betegnelse for dette $\alpha(t)$ og tilsvarende benytter vi $\alpha(a)$ for $\alpha(x/a)$.

$$\forall_v\text{:}\ \frac{\alpha(t), \Gamma \to \Delta}{\forall x\alpha(x), \Gamma \to \Delta} \qquad \forall_h\text{:}\ \frac{\Gamma \to \Delta, \alpha(a)}{\Gamma \to \Delta, \forall x\alpha(x)}$$

$$\exists_v\text{:}\ \frac{\alpha(a), \Gamma \to \Delta}{\exists x\alpha(x), \Gamma \to \Delta} \qquad \exists_h\text{:}\ \frac{\Gamma \to \Delta, \alpha(t)}{\Gamma \to \Delta, \exists x\alpha(x)}$$

I kvantorreglerne er t en vilkårlig term, og den frie variabel, a, som kaldes egenvariablen, må ikke forekomme i den nedre sekvent. De formler, som indeholder de indførte kvantorer, er slutningsreglens principalformel. □

2.3.9 Eksempel. Den semantiske interpretation af kvantorreglerne er mere kompliceret end interpretationen af reglerne for de udsagnslogiske symboler. Igen bruges TS.

I $\forall_v$-reglen er den øvre sekvent sand, hviss $\alpha(t)^\sigma = \bot$ eller $\gamma_1^\sigma = \bot$ eller $\delta_1^\sigma = \top$. Den nedre sekvent er sand, hviss $(\forall x\alpha(x))^\sigma = \bot$ eller $\gamma_1^\sigma = \bot$ eller $\delta_1^\sigma = \top$. $(\forall x\alpha(x))^\sigma = \bot$, hviss $\alpha(x)^{\sigma(x/u)} = \bot$ for mindst ,t $u \in \mathcal{U}$. Hvis $\gamma_1^\sigma = \bot$ eller $\delta_1^\sigma = \top$ er betingelserne opfyldt. Antag nu, at disse betingelser ikke er opfyldt, hvorfor der, for at den øvre sekvent er sand, må gælde, at $\alpha(t)^\sigma = \bot$ for enhver term t, f. eks. en fri variabel y. Under interpretationen σ må y tildeles en værdi fra universet. Der vil derfor være en værdi i universet, hvormed $\alpha(t)^\sigma = \bot$.[22] Af dette følger, at $\forall x\alpha(x)^{\sigma(x/u)} = \bot$ for mindst ,t $u \in \mathcal{U}$, og dermed, at den nedre sekvent er en logisk konsekvens af den øvre.

I $\forall_h$ er den øvre sekvent sand, hviss $\gamma_1^\sigma = \bot$ eller $\delta_1^\sigma = \top$ eller $(\alpha(a))^\sigma = \top$. Hvis $\gamma_1^\sigma = \bot$ eller $\delta_1^\sigma = \top$ er den nedre sekvent også sand. Antag nu, at $\gamma_1^\sigma = \top$ og $\delta_1^\sigma = \bot$. Da a ikke må forekomme i den nedre sekvent, kan a ikke forekomme i γ_1. Da γ_1 under σ's værdi således ikke afhænger af a's tilskrivning, vil γ_1 være sand under tildelinger med alle de mulige variabeltilskrivninger til a fra $\mathcal{U}$. For at $\alpha(a)$ er en logisk konsekvens af γ_1, må $\alpha^\sigma = \top$ for alle de σ, hvorunder γ_1 er sand. Dvs. $\alpha(a)$ er sand for alle tildelinger af a. Altså vil $\forall x\alpha(x)$ også være tilfredsstillet; den nedre sekvent vil være sand, hvis den øvre er sand.

De samme egenskaber ved $\exists_h$ og $\exists_h$ kan vises ved lignende betragtninger. □

Bemærk, at reglerne er udelukkende syntaktiske, selv om de er blevet begrundet gennem semantiske overvejelser. De udtaler sig om reglerne for manipulation af formler i $\mathbf{G_e}$; en manipulation så fastlagt og uafhængig af intuition og semantik, at man kunne sætte en maskine igang med den.

2.3.3 Aksiomer i $\mathbf{G_e}$

2.3.10 Definition. **Aksiomerne** i $\mathbf{G_e}$ er sekventerne:

1. $\alpha \to \alpha$, hvor α er en arbitrær formel.
2. $\to t_n = t_n$.
3. $t_1 = t_{n+1}, \ldots, t_n = t_{2n} \to f(t_1, \ldots, t_n) = f(t_{n+1}, \ldots, t_{2n})$.
4. $t_1 = t_{n+1}, \ldots, t_n = t_{2n}, P(t_1, \ldots, t_n) \to P(t_{n+1}, \ldots, t_{2n})$,

hvor $t_1, \ldots, t_{2n}$ er arbitrære termer. □

[22] Husk, at $\sigma(x/u)$ tildeler x værdien u, men tildeler alle andre frie variable samme værdi som interpretationen σ.

Aksiomerne i $\mathbf{G_e}$ er logisk sande. For aksiom 1 ses dette ved, at der for alle formler α og alle interpretationer σ gælder, at enten er $\alpha^\sigma = \top$, eller også er $\alpha^\sigma = \bot$, hvorfor $(\alpha \to \alpha)^\sigma = \top$ for alle σ. Aksiomerne 2–4 indfører identitet i kalkylen på samme måde, som aksiom VII–IX gør det i $\mathbf{H}$. Da de to sæt aksiomer udtrykker det samme, kan argumentationen fra side 24 også benyttes i $\mathbf{G_e}$ til at vise, at aksiomerne 2–4 er logisk sande.

2.3.11 DEFINITION. Givet en følge af præmisser, P, kan der konstrueres en endelig struktur i $\mathbf{G_e}$, kaldet et **bevistræ**, bygget op efter følgende syntaks:

(a) De allerøverste sekventer, dvs. de, der ikke har nogen sekventer over sig, kaldes **initialsekventer**.

(b) Initialsekventerne er hver især enten aksiomer eller præmisser.

(c) Enhver sekvent i bevistræet, pånær den allernederste, er en øvre sekvent i en slutningsregel, hvor den nedre sekvent også er i bevistræet. □

En slutningsregel med to øvre sekventer vil give anledning til en såkaldt forgrening. En **gren** i bevistræet er den følge af sekventer, som starter med en initialsekvent og afsluttes med den allernederste sekvent i bevistræet. Denne nederste sekvent S kaldes **slutsekventen** af bevistræet.

2.3.12 DEFINITION. Bevistræet siges at være et $\mathbf{G_e}$**-bevis** for S, hvilket betegnes $P \vdash_{\mathbf{Ge}} S$. Vi siger, at S er bevist i $\mathbf{G_e}$ under antagelse af P. Hvis P er tom, siges S at være $\mathbf{G_e}$**-beviselig**, da S kan bevises uden præmisser. □

2.3.4 Eksempler på beviser i $\mathbf{G_e}$

2.3.13 EKSEMPEL. Udledning af nye regler for disjunktion-højre $\vee_h^*$ og konjuktion-venstre $\wedge_v^*$.[23]

(a) $\dfrac{\Gamma \to \Delta, \alpha, \beta}{\Gamma \to \Delta, \alpha \vee \beta}$ (b) $\dfrac{\alpha, \beta, \Gamma \to \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \to \Delta}$

Se figur 2.1 og figur 2.2. □

$$
\begin{array}{ll}
\Gamma \to \Delta, \alpha, \beta & \\
\hline
\Gamma \to \Delta, \alpha, \alpha \vee \beta & \vee_h \\
\hline
\Gamma \to \Delta, \alpha \vee \beta, \alpha & O_h \\
\hline
\Gamma \to \Delta, \alpha \vee \beta, \alpha \vee \beta & \vee_h \\
\hline
\Gamma \to \Delta, \alpha \vee \beta & K_h
\end{array}
$$

Figur 2.1 Regel for disjunktion-højre.

[23]Stjernen '$*$' markerer, at der er tale om en ny regel.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\alpha, \beta, \Gamma \to \Delta}{\alpha \wedge \beta, \beta, \Gamma \to \Delta}\ \wedge_v}{\beta, \alpha \wedge \beta, \Gamma \to \Delta}\ O_v}{\alpha \wedge \beta, \alpha \wedge \beta, \Gamma \to \Delta}\ \wedge_v}{\alpha \vee \beta, \Gamma \to \Delta}\ K_v$$

Figur 2.2 Regel for konjuktion-venstre.

2.3.14 Eksempel. Det udelukkede tredjes princip kan bevises i $\mathbf{G_e}$; det vil sige, at $\vdash_{\mathbf{Ge}} \to \alpha \vee \neg\alpha$. Se figur 2.3. □

$$\cfrac{\cfrac{\alpha \to \alpha}{\to \alpha, \neg\alpha}\ \neg_h}{\to \alpha \vee \neg\alpha}\ \vee_h^*$$

Figur 2.3 Det udelukkede tredjes princip, bemærk brugen af aksiomet $\alpha \to \alpha$ og den nye disjunktion-højreregel.

2.3.15 Eksempel. Ligesom det udelukkede tredjes princip kan bevises i $\mathbf{G_e}$, kan reglen om dobbelt negation, som i **H** udtrykkes $\neg\neg\alpha \vdash_{\mathbf{H}} \alpha$, også bevises i $\mathbf{G_e}$. I $\mathbf{G_e}$ bliver beviset for denne regel til et bevis for sekventen $\neg\neg\alpha \to \alpha$. Se figur 2.4. □

$$\cfrac{\cfrac{\alpha \to \alpha}{\to \alpha, \neg\alpha}\ \neg_h}{\neg\neg\alpha \to \alpha}\ \neg_v$$

Figur 2.4 Regel om dobbelt negation.

2.3.16 Eksempel. Umiddelbart kunne det se ud som om, vi med slutningsreglerne kun kan indføre logiske symboler, men sådan forholder det sig ikke. Fra de ovenstående regler, kan vi også udlede regler, hvor symboler bliver 'slettet'. Beviset for $\Gamma \to \Delta, \forall x\alpha(x) \vdash_{\mathbf{Ge}} \Gamma \to \Delta, \alpha(t)$, se figur 2.5, giver på sekventform følgende regel, som vi kalder for $\forall_{h,slet}$:

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \forall x\alpha(x)}{\Gamma \to \Delta, \alpha(t)}$$

Dobbeltlinien mellem de to nederste sekventer i figur 2.5 betegner, at der sker et antal kontraktioner K_v, som svarer til det antal formler, der er i følgen Γ og et antal ombytninger O_v, således at disse kontraktioner kan lade sig gøre. □

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma \to \Delta, \forall x\alpha(x)$}
\AxiomC{$\alpha(t) \to \alpha(t)$}
\RightLabel{U_v}
\UnaryInfC{$\Gamma, \alpha(t) \to \alpha(t)$}
\doubleLine
\RightLabel{O_v}
\UnaryInfC{$\alpha(t), \Gamma \to \alpha(t)$}
\RightLabel{$\forall_v$}
\UnaryInfC{$\forall x\alpha(x), \Gamma \to \alpha(t)$}
\RightLabel{Sn}
\BinaryInfC{$\Gamma, \Gamma \to \Delta, \alpha(t)$}
\doubleLine
\RightLabel{K_v, O_v}
\UnaryInfC{$\Gamma \to \Delta, \alpha(t)$}
\end{prooftree}
$$

Figur 2.5 Udledning af $\forall_{h,slet}$. Graden af snitformlen $\forall\alpha(x)$ er i dette tilfælde $1 + grad(\alpha)$.

For alle slutningsregler, undtagen de strukturelle, kan der helt analogt til $\forall_{h,slet}$ udledes regler, der sletter symbolerne. Bemærk iøvrigt symmetrien i ovenstående bevis: For at udlede $\forall_{h,slet}$ bruges en $\forall_v$. Denne symmetri findes også ved de andre regler. I beviset for reglen for slettelse af $\wedge$ i antecedenten ($\wedge_{v,slet}$), skal der således benyttes en $\wedge_h$ samt et snit, hvor snitformlen er af formen $\alpha \wedge \beta$. Denne symmetri mht. højre- og venstreregler, indførelse og slettelse gør, at vi kalder $\mathbf{G_e}$ for **symmetrisk**.

Når en sekvent i praksis skal bevises i $\mathbf{G_e}$, startes fra bunden med slutsekventen — den sekvent, der skal bevises. Herefter arbejder man sig opad ved hjælp af slutningsreglerne, indtil der som øverste sekvent er et aksiom eller en præmis. Udledninger er beskrevet oppefra, da beviserne opfattes oppefra og ned.

2.3.5 Konsistens af $\mathbf{G_e}$

2.3.17 DEFINITION. Begrebet inkonsistens er, analogt til inkonsistens i **H**, udtrykt ved, at der for en formel α gælder

$$\vdash_{\mathbf{Ge}} \to \alpha \quad \text{og} \quad \vdash_{\mathbf{Ge}} \to \neg\alpha.$$

□

2.3.18 SÆTNING. $\mathbf{G_e}$ er inkonsistent, hviss den **tomme sekvent** $\to$ kan udledes.

BEVIS. Antag, at $\mathbf{G_e}$ er inkonsistent, da findes to beviser for hhv. $\to \alpha$ og $\to \neg\alpha$ for ,n eller anden formel α. Således kan $\to \alpha$ og $\to \neg\alpha$ benyttes som præmisser for et bevis af den tomme sekvent. Se figur 2.6.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\to \neg\alpha$}
\AxiomC{$\to \alpha$}
\RightLabel{$\neg_v$}
\UnaryInfC{$\neg\alpha \to$}
\RightLabel{Sn}
\BinaryInfC{$\to$}
\end{prooftree}
$$

Figur 2.6 Udledning af den tomme sekvent ud fra $\to \alpha$ og $\to \neg\alpha$.

Omvendt har vi tidligere vist, at en egenskab ved et inkonsistent system er, at alle formler kan udledes fra det. I dette tilfælde kan man ved brug af U_h på den tomme sekvent udlede enhver anden formel, bla. $\to \alpha$ og $\to \neg\alpha$. ■

Sætning 2.3.18 vil iøvrigt blive benyttet til konsistensbeviset for teorien om de naturlige tal, der udgør kapitel 4.

Metoden til at undersøge, om $\mathbf{G_e}$ er konsistent, er ikke at søge efter den tomme sekvent. Vi vil istedet vise sundheden af $\mathbf{G_e}$, hvortil et lemma benyttes. Herefter følger konsistensen af $\mathbf{G_e}$ som et korollar.

2.3.19 Lemma. Antallet af regler i $\mathbf{G_e}$ kan reduceres til de strukturelle regler samt reglerne $\neg_v$, $\neg_h$, $\Rightarrow_v$, $\Rightarrow_h$, $\forall_v$ og $\forall_h$.

Bevis. Lemmaet følger af gennemgangen i afsnit 2.1.1. Vi nøjes med at vise, at (a) $\wedge_h$ kan udledes af $\neg_v$, $\neg_h$ og $\Rightarrow_h$, samt at (b) $\exists_v$ kan udledes af $\neg_v$, $\neg_h$ og $\forall_h$. Resten af lemmaet følger trivielt efter samme melodi. Til at bevise, at $\wedge_h$ kan udelades, se figur 2.7, benytter vi, at

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \alpha \qquad \Gamma \to \Delta, \beta}{\Gamma \to \Delta, \alpha \wedge \beta} \text{ pr. definition er ækvivalent med } \frac{\Gamma \to \Delta, \alpha \qquad \Gamma \to \Delta, \beta}{\Gamma \to \Delta, \neg(\alpha \Rightarrow \neg\beta)}$$

Til at bevise, at $\exists_v$ kan udelades, se figur 2.8, benytter vi, at

$$\frac{\alpha(a), \Gamma \to \Delta}{\exists x \alpha(x), \Gamma \to \Delta} \text{ pr. definition er ækvivalent med } \frac{\alpha(a), \Gamma \to \Delta}{\neg\forall x \neg\alpha(x), \Gamma \to \Delta}$$

∎

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma \to \Delta, \alpha \qquad \cfrac{\Gamma \to \Delta, \beta}{\neg\beta, \Gamma \to \Delta}\;\neg_v}{\alpha \Rightarrow \neg\beta, \Gamma, \Gamma \to \Delta, \Delta}\;\Rightarrow_v}{\alpha \Rightarrow \neg\beta, \Gamma \to \Delta}\;K_v, K_h, O_v, O_h}{\Gamma \to \Delta, \neg(\alpha \Rightarrow \neg\beta)}\;\neg_h$$

Figur 2.7 Bevis af (a).

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\alpha(a), \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg\alpha(a)}\;\neg_h}{\Gamma \to \Delta, \forall x\, \neg\alpha(a/x)}\;\forall_h}{\neg(\forall x\, \neg\alpha(a/x)), \Gamma \to \Delta}\;\neg_v$$

Figur 2.8 Bevis af (b).

2.3.20 Sætning. Enhver sekvent S, som er beviselig i $\mathbf{G_e}$, er logisk sand. Det vil med andre ord sige, at hvis $\Gamma \vdash_{\mathbf{Ge}} S$ så $\Gamma \models S$.

Bevis. Vi skal vise, at givet at alle initialsekventer er sande, da er slutsekventen i en udledning også sand. Betegn initialsekventen i en udledning S_0, den følgende sekvent i grenen S_1 og så fremdeles. Ifølge afsnit 2.3.3 er aksiomerne logisk sande. Antag, at sekventen S_n i et bevistræ er logisk sand. For at danne sekventen S_{n+1} benyttes en slutningsregel. Da den nedre sekvent i en slutningsregel, ifølge afsnit 2.3.2, er en logisk konsekvens af den/de øvre, vil sekventen S_{n+1} også være logisk sand. Derfor vil enhver sekvent, som kan udledes i $\mathbf{G_e}$, være logisk sand. ∎

2.3.21 Korollar. $\mathbf{G_e}$ er konsistent.

Bevis. Antag, at $\mathbf{G_e}$ er inkonsistent. Heraf følger $\vdash_{\mathbf{Ge}} \to \alpha$, og $\vdash_{\mathbf{Ge}} \to \neg\alpha$. Dette medfører, ifølge sætning 2.3.20, at $\models_{\mathbf{Ge}} \to \alpha$, samt $\models_{\mathbf{Ge}} \to \neg\alpha$. Dette er i modstrid med TS. Altså må $\mathbf{G_e}$ være konsistent. ∎

2.3.6 Beviselighed og kalkylen G

I de foregående afsnit har vi defineret en kalkyle med identitet. En kalkyle, som f. eks. $\mathbf{G_e}$ blot uden identitet, som vi derfor betegner $\mathbf{G}$, kan også defineres ved at begrænse antallet af aksiomer. I $\mathbf{G}$ vil der kun være ,t aksiom: $\alpha \to \alpha$.

2.3.22 DEFINITION. Følgende tre formler vil vi betegne Γ_{e}:

1. $\forall x(x = x)$.
2. $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n((x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n) \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n))$, for ethvert funktionssymbol f med n argumenter.
3. $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n((x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \wedge P(x_1, \dots, x_n)) \Rightarrow P(y_1, \dots, y_n))$, for ethvert prædikatsymbol P med n argumenter. □

2.3.23 SÆTNING. En sekvent $\Gamma \rightarrow \Delta$ er beviselig i $\mathbf{G_e}$, hviss $\Gamma,\ \Gamma_{\mathrm{e}} \rightarrow \Delta$ er beviselig i $\mathbf{G}$.

BEVIS. Først betragtes beviset for $\Gamma \rightarrow \Delta$ i $\mathbf{G_e}$. Initialsekventerne i $\mathbf{G_e}$ kan alle vises fra Γ_{e} samt aksiomet i $\mathbf{G}$. Γ_{e} vil da optræde som præmisser, og således fungere på samme måde som aksiomer. Sætningen vises da ved induktion over antallet af udledninger i beviset.

Antag herefter, at der findes et bevis for $\Gamma, \Gamma_{\mathrm{e}} \rightarrow \Delta$ i $\mathbf{G}$. Dette bevis vil også findes i $\mathbf{G_e}$, da $\mathbf{G_e}$ kan betragtes som en udvidelse af $\mathbf{G}$. Da alle formler i Γ_{e} er beviselige i $\mathbf{G_e}$, vil der kunne udledes $\rightarrow \delta_i$ for alle $\delta_i \in \Gamma_{\mathrm{e}}$. Derved kan vi ved gentagen brug af snit-reglen fjerne alle formler i Γ_e, der optræder i beviset for $\Gamma \rightarrow \Delta$. Se evt. rapportens bagside for en figur, der illustrerer beviset. ■

Denne sætning har den konsekvens, at spørgsmålet om, hvorvidt en sekvent $\Gamma \rightarrow \Delta$ er beviselig i $\mathbf{G_e}$, kan reduceres til spørgsmålet om, hvorvidt sekventen $\Gamma,\ \Gamma_{\mathrm{e}} \rightarrow \Delta$ er beviselig i $\mathbf{G}$. Derfor kan vi begrænse os til at undersøge kalkylen $\mathbf{G}$.

2.3.7 Fuldstændighed af G og $\mathbf{G_e}$

Vi nøjes med at se på **G** uden funktionssymboler, da beviset her er simpelt. Beviset for den fulde logik er principielt det samme. Det er på side 14 vist, hvordan funktionssymboler udtrykkes som prædikatsymboler, og dermed problemfrit kan udelades i kalkylen.

Beviset går i korthed ud på, at for enhver endelig sekvent S indeholdende formler fra $\mathcal{L}_1$ uden lighed, findes der enten et bevis for S i **G**, eller S er ikke logisk sand. Alle logisk sande sekventer kan bevises i **G**, og **G** er dermed semantisk fuldstændig.

For en tilfældig sekvent S konstrueres et **reduktionstræ** på en sådan måde, at det ses, om S kan bevises eller ej.[24] Hvis S ikke kan bevises, findes der ud fra reduktionstræet en **interpretation**, hvorunder S ikke er sand, hvorved det er vist, at S ikke er logisk sand.

Reduktionstræet for S

Lad sekventen S være udtrykt i et sprog, som indeholder de udsagnslogiske symboler $\neg$, $\Rightarrow$ og kvantoren $\forall$. Hvis der i S er formler indeholdende ikke-basale[25] symboler, må disse formler først omskrives, så de kun indeholder $\neg$, $\Rightarrow$ og $\forall$. Der konstrueres et reduktionstræ nedefra og op for S på baggrund af følgende algoritme:

(a) Lad S være den øverste sekvent i et reduktionstræ kun bestående af S selv.

(b) Hvis den øvre sekvent i en gren i reduktionstræet har en formel fælles i antecedent og succedent så luk grenen. Hvis alle grene i træet er lukkede så stop. Hvis ikke alle grene er lukkede så gå til (c).

[24] Et reduktionstræ skal ikke opfattes som et bevistræ, men som en metode til at afgøre, hvorvidt en sekvent er logisk sand eller ej. Hvis en sekvent er logisk sand konstrueres reduktionstræet for sekventen på en sådan måde, at det har mange lighedspunkter med et bevistræ for sekventen, hvilket senere udnyttes i fuldstændighedsbeviset.

[25] Disse kaldes også forkortelses-symboler. Se side 16–16.

(c) For enhver gren, der ikke er lukket, testes den øverste sekvent i grenen ved at gennemløbe de nedenstående punkter 1-7. Hvert punkt kaldes en reduktion, da der ud fra givne formler skabes nye formler med et logisk symbol mindre. Da der i enkelte situationer er brug for at genbruge formler i reduktionsprocessen, gentages de formler, der er reduceret på, sammen med deres reducerede. Den øvre sekvent i en gren, der ikke er lukket, antages i hvert punkt at være på formen $\Pi \to \Lambda$.

1. $\neg$ **i antecedenten**. Lad $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ være de formler i Π, der kan skrives $\neg\beta_1, \ldots, \neg\beta_n$ og som reduktionen i punkt 1 ikke tidligere har været udført på. Skriv da sekventen $\Pi \to \Lambda, \beta_1, \ldots, \beta_n$ ovenover $\Pi \to \Lambda$.

$$\frac{\Pi \to \Lambda, \beta_1, \ldots, \beta_n}{\Pi \to \Lambda}$$

Der reduceres kun på de formler, som reduktionen i punkt 1 ikke tidligere er udført på, fordi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ gentages i sekventen med de reducerede formler $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Uden restriktionen vil der kunne reduceres på $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, hver gang punkt 1 gennemløbes. Dette fører ikke til nye formler i sekventen med de reducerede formler, men blot til en gentagelse af $\beta_1, \ldots, \beta_2$ hver gang. Af hensyn til overskueligheden begrænses antallet af gange, hvor $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ reduceres, derfor til ‚n enkelt gang.

2. $\neg$ **i succedenten**. Lad $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ være de formler i Λ, der kan skrives $\neg\beta_1, \ldots, \neg\beta_n$ og som reduktion 2 ikke tidligere er brugt på. Skriv da sekventen $\beta_1, \ldots, \beta_n, \Pi \to \Lambda$ ovenover $\Pi \to \Lambda$.

$$\frac{\beta_1, \ldots, \beta_n, \Pi \to \Lambda}{\Pi \to \Lambda}$$

3. $\Rightarrow$ **i antecedenten**. Lad $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ være de formler i Π, der kan skrives på formen $\beta_1 \Rightarrow \gamma_1, \ldots, \beta_n \Rightarrow \gamma_n$ og hvorpå reduktion 3 ikke tidligere er brugt. Der skrives nu 2^n sekventer over $\Pi \to \Lambda$ alle på formen $\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_k}, \Pi \to \Lambda, \beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_{n-k}}$, hvor $i_1 < \cdots < i_k$ og $j_1 < \cdots < j_{n-k}$.[26] I hver af de 2^n sekventer er antallet af β- og γ-formler sammenlagt n og $(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_{n-k})$ er alle mulige permutationer af $(1, \ldots, n)$, som ikke overtræder begrænsningen om den indbyrdes rækkefølge af $i_1, \ldots, i_k$ og $j_1, \ldots, j_{n-k}$.

$$\frac{\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_k}, \Pi \to \Lambda, \beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_{n-k}} \quad \ldots \quad (2^n \text{ gange ialt})}{\Pi \to \Lambda}$$

Reduktionen under punkt 3 er den eneste af reduktionerne, hvor reduktionstræet forgrener sig. Antallet af grene efter forgreningen bliver 2^n. Her vises et eksempel, hvor n er 2, hvortil der svarer $2^2 = 4$ ovenstående sekventer, der hver er begyndelsen på en ny gren. Antag, at formlerne $\beta_1 \Rightarrow \gamma_1$ og $\beta_2 \Rightarrow \gamma_2$ er indeholdt i Π.

$$\frac{\gamma_1, \gamma_2, \Pi \to \Lambda \quad \gamma_1, \Pi \to \Lambda, \beta_2 \quad \gamma_2, \Pi \to \Lambda, \beta_1 \quad \Pi \to \Lambda, \beta_1, \beta_2}{\Pi \to \Lambda}$$

4. $\Rightarrow$ **i succedenten**. Lad $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ være de formler i Λ, der kan skrives på formen $\beta_1 \Rightarrow \gamma_1, \ldots, \beta_n \Rightarrow \gamma_n$, hvorpå reduktion 4 ikke tidligere er brugt. Skriv da sekventen $\beta_1, \ldots, \beta_n, \Pi \to \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ over $\Pi \to \Lambda$.

$$\frac{\beta_1, \ldots, \beta_n, \Pi \to \Lambda, \gamma_1, \ldots, \gamma_n}{\Pi \to \Lambda}$$

[26] Bemærk, at det kun er den indbyrdes rækkefølge mellem hhv. $i_1, \ldots, i_k$ og $j_1, \ldots, j_{n-k}$, der har betydning. Det må f. eks. gerne forekomme, at $i_2 > j_1$.

5. $\forall$ **i antecedenten**. Lad $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ være de formler i Π, der kan skrives på formen $\forall x_1\beta_1, \ldots, \forall x_n\beta_n$. Der er her **intet** krav om, at reduktion 5 ikke tidligere må være udført på $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, da reduktionen ønskes gentaget. Kald den første frie variabel, der endnu ikke er brugt til reduktion af $\alpha_i(x_i)$, for x_i^*.[27] Når dette er gjort for $i = 1, \ldots, n$, skrives sekventen $\beta_1(x_1/x_1^*), \ldots, \beta_n(x_n/x_n^*), \Pi \to \Lambda$ over $\Pi \to \Lambda$. Ved hvert gennemløb af reduktion 5 bruges en ny fri variabel til at reducere α_i, indtil alle frie variable har været brugt i en reduktion af alle α_i i den pågældende gren.

$$\frac{\beta_1(x_1/x_1^*), \ldots, \beta_n(x_n/x_n^*), \Pi \to \Lambda}{\Pi \to \Lambda}$$

6. $\forall$ **i succedenten**. Lad $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ være de formler i Λ, der kan skrives på formen $\forall x_1\beta_1, \ldots, \forall x_n\beta_n$, hvorpå reduktion 6 ikke tidligere er brugt. Kald de første n frie variable, som endnu ikke er brugt til nogen reduktioner i den pågældende gren, for $x_1^*, \ldots, x_n^*$. Skriv da sekventen $\Pi \to \Lambda, \beta_1(x_1/x_1^*), \ldots, \beta_n(x_n/x_n^*)$ over $\Pi \to \Lambda$.

$$\frac{\Pi \to \Lambda, \beta_1(x_1/x_1^*), \ldots, \beta_n(x_n/x_n^*)}{\Pi \to \Lambda}$$

   Reduktion 6 har til forskel fra reduktion 5 krav om, at der ikke tidligere må være blevet reduceret på $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. En sekvent kan tolkes som, at man ud fra alle formler i antecedenten kan bevise mindst ,n af succedentformlerne inden for en opskrivning af prædikatlogikken i Hilbertstil.[28] I denne logik er det muligt ud fra en generalisering $\forall x_i\beta_i$ at bevise alle mulige enkelttilfælde β_i med ethvert element i universet indsat. Hvis der i en gren i reduktionstræet er formlen $\forall x_i\beta_i$ i antecedenten og $\beta_i(e)$ i succedenten, hvor e er element i universet, skal grenen kunne lukkes, hvilket gøres ved at skrive β_i for alle elementer i universet op i antecedenten ligesom i reduktion 5. Grenen lukkes, da der vil være en sekvent i grenen, hvor $\beta_i(e)$ vil optræde på begge sider af $\to$. Omvendt kan der ikke generaliseres ud fra et enkelttilfælde, hvorfor det under reduktion 6 ikke er hensigtsmæssigt at indsætte alle universets elementer i β_i. Her indsættes et element, der ikke tidligere har optrådt i grenen, hvilket betyder, at hvis β_i af netop dette element senere fremkommer som en antecedentformel i grenen, må det være fordi den er en reduktion 5 af en formel på formen $\forall x_i\beta_i$, hvorefter grenen kan lukkes.

7. Hvis det om en gren gælder, at den øverste sekvent i grenen ikke har en fælles formel for antecedent og succedent, gentages den øvre sekvent over sig selv i alle grene.

$$\frac{\Pi \to \Lambda}{\Pi \to \Lambda}$$

(d) Gå til (b).

Reduktionstræet fås ved om nødvendigt at fortsætte uendeligt længe. På grund af reduktion 7 kan det derfor antages, at et træ, hvor ikke alle grene er lukket, indeholder en uendelig gren. Dette gør beviset ikke-konstruktivt.

Reduktionsreglerne er konstrueret så de, ifølge sandhedsdefinitionen for sekventer, er sandhedsbevarende fra nedre sekvent til alle øvre sekventer.

Reduktionstræet for S kan nu være en af følgende to typer:

---

[27] Det giver ingen syntaktisk mening at indsætte en bundet variabel. Se evt. definition 2.2.1 om variabelsubstitution.

[28] Se side 27 for en gennemgang af denne tolkning.

I Alle grene i reduktionstræet er lukkede og dermed endelige. Hvis dette er tilfældet, vil der let kunne konstrueres et bevis for S, da reduktionsreglerne ligner slutningsreglerne i **G** meget. Efter passende udtyndinger vil den øverste sekvent i reduktionstræet være et aksiom i **G** på formen $\alpha \rightarrow \alpha$, hvorefter hele reduktionstræet kan efterlignes kun ved brug af slutningsregler fra **G**. Til sidst er et bevis for sekventen S på denne måde konstrueret. På side 43 er givet et eksempel på et reduktionstræ af type I.

II Der findes mindst ‚n gren, der ikke er lukket og dermed er en uendelig gren i reduktionstræet. Sekventen S kan dermed ikke bevises i **G**. En uendelig gren i træet vælges og en interpretation, hvorunder S ikke er sand, konstrueres.

Det overlades til læseren at gennemføre argumenterne, hvor reduktionstræet er af type I. I det følgende vises, hvordan interpretationen i tilfælde II konstrueres.

Interpretationen

Sekventen S betegnes S_0, sekventen umiddelbart over denne S_1 og så fremdeles. Lad sekventen S_i være $\Gamma_i \rightarrow \Delta_i$. Da er $\cup\Gamma$ mængden af alle de formler, hvortil der eksisterer mindst ‚t i i grenen, så formlen optræder i Γ_i. Tilsvarende er $\cup\Delta$ mængden af alle formler, der optræder i mindst ‚t Δ_i i grenen. Vi vil nu undersøge, om der findes en interpretation, hvorunder enhver formel i $\cup\Gamma$ er tilfredsstillet, og hvorunder enhver formel i $\cup\Delta$ ikke er tilfredsstillet. Hvis dette er tilfældet, vil enhver sekvent S_i i grenen ikke være tilfredsstillet under en sådan interpretation. Dette betyder specielt, at S ikke er tilfredsstillet under interpretationen og derfor ikke er logisk sand.

Lad universet $\mathcal{U}$ under interpretationen være mængden af alle frie variable.[29] Interpretationen σ er givet ved, at enhver fri variabel x_i bliver tildelt værdien x_i fra universet. Under σ løber enhver bunden variabel over hele universet.

Til ethvert n-ary prædikatsymbol P virkende på termerne $t_1, \ldots, t_n$ lader σ svare en delmængde af $\mathcal{U}^n$, så når $P(t_1, \ldots, t_n) \in \cup\Gamma$, da er $(P(t_1, \ldots, t_n))^\sigma = \top$, og når $P(t_1, \ldots, t_n) \notin \cup\Gamma$, er $(P(t_1, \ldots, t_n))^\sigma = \bot$. Da interpretationen af et n-ary prædikatsymbol netop er at skelne mellem de delmængder af $\mathcal{U}^n$, hvorunder prædikatet er sandt, og de delmængder hvor det er falsk, er det en simpel sag at konstruere interpretationen af ethvert prædikatsymbol som beskrevet. Da funktionssymboler kan udtrykkes som prædikatsymboler, beskrives disse ikke eksplicit.

Vi vil nu ved induktion over antallet af logiske symboler i en vilkårlig formel α vise, at enhver formel i $\cup\Gamma$ er tilfredsstillet under σ, og at enhver formel i $\cup\Delta$ ikke er tilfredsstillet under σ.

Lad α være en atomisk formel, dvs. der optræder ikke logiske symboler i α og α har formen $P_1(t_1, \ldots, t_n)$. Hvis $\alpha \in \cup\Gamma$, da er $\alpha^\sigma = \top$, og hvis $\alpha \in \cup\Delta$, da er $\alpha^\sigma = \bot$ ifølge definitionen af σ på prædikater. Dette er induktionsbasen.

Antag i det følgende som induktionshypotese, at formlerne β og γ begge er tilfredsstillet under σ, hvis $\beta, \gamma \in \cup\Gamma$ samt, at β og γ ikke er tilfredsstillet, hvis $\beta, \gamma \in \cup\Delta$. Antallet af logiske symboler i formler bestående af β og γ kan øges ved at danne formlerne (1) $\neg\beta$, (2) $\beta \Rightarrow \gamma$ og (3) $\forall x\beta$. Der ses her bort fra $\neg\gamma, \gamma \Rightarrow \beta$ og $\forall x\gamma$, da de vil kunne behandles tilsvarende.

1. Lad α være formlen $\neg\beta$. I tilfældet, hvor $\neg\beta \in \cup\Gamma$, findes det mindste i, hvor $\neg\beta$ er at finde i antecedenten af $\Gamma_i \rightarrow \Delta_i$. Ud fra definitionen af reduktion 1 følger, at β findes i succedenten af $\Gamma_{i+1} \rightarrow \Delta_{i+1}$ og dermed, at $\beta \in \cup\Delta$. Ud fra induktionshypotesen må $\beta^\sigma = \bot$, hvorved $(\neg\beta)^\sigma = \top$.

[29] Valget af univers er underordnet, blot skal der være elementer nok til, at der kan foretages en injektiv tildeling af værdier til alle frie variable under interpretationen. Dette er opfyldt, hvis $\mathcal{U}$ er mængden af alle frie variable.

Hvis formlen $\neg\beta$ optræder i $\cup\Delta$, findes det mindste i, hvor $\neg\beta$ er at finde i succedenten af $\Gamma_i \to \Delta_i$. Ifølge reduktion 2 vil β være i antecedenten af $\Gamma_{i+1} \to \Delta_{i+1}$. Dermed må $\beta \in \cup\Gamma$, hvorved $\beta^\sigma = \top$ ifølge induktionshypotesen. Af dette følger, at $(\neg\beta)^\sigma = \bot$.

2. Lad α være på formen $\beta \Rightarrow \gamma$. Hvis $\alpha \in \cup\Gamma$ findes det mindste i, hvor $\beta \Rightarrow \gamma$ er i antecedenten af $\Gamma_i \to \Delta_i$. Ifølge reduktion 3 vil reduktionstræet her dele sig i to grene. I den ene gren vil γ ligge i antecedenten af $\Gamma_{i+1} \to \Delta_{i+1}$. Hermed er $\gamma^\sigma = \top$, hvorved $(\beta \Rightarrow \gamma)^\sigma = \top$. I den anden gren vil β ligge i succedenten af $\Gamma_{i+1} \to \Delta_{i+1}$. Hermed er $\beta^\sigma = \bot$, hvorved $(\beta \Rightarrow \gamma)^\sigma = \top$. Det gør således ingen forskel, hvilken af de to grene der er den uendelige gren — i begge tilfælde er $(\beta \Rightarrow \gamma)^\sigma = \top$.

   Hvis $\beta \Rightarrow \gamma \in \cup\Delta$ vil reduktion 4 give, at β ligger i antecedenten af $\Gamma_{i+1} \to \Delta_{i+1}$ og γ i succedenten. Derfor er $\beta^\sigma = \top$ og $\gamma^\sigma = \bot$. Af dette følger, at $(\beta \Rightarrow \gamma)^\sigma = \bot$.

3. Lad α være på formen $\forall x\beta$. Hvis $\alpha \in \cup\Gamma$ findes det mindste i, hvor $\forall x\beta$ ligger i antecedenten af $\Gamma_i \to \Delta_i$. I antecedenten af $\Gamma_{i+1} \to \Delta_{i+1}$ vil være formlen β med den første frie variabel indsat. I Γ_{i+2} vil være β med den næste frie variabel indsat, da reduktion 5 skal gentages på α. Da grenen er uendelig, vil der være et sted, hvor reduktion 5 er foretaget så mange gange, at vi i $\cup\Gamma$ har β med alle frie variable indsat. Da universet under interpretationen er mængden af alle frie variable, vil $\beta^\sigma = \top$ for alle elementer i universet, hvilket er ensbetydende med, at $(\forall x\beta)^\sigma = \top$.

   Lad $\forall x\beta \in \cup\Delta$. Ifølge reduktion 6 vil β ligge i succedenten af $\Gamma_{i+1} \to \Delta_{i+1}$ med en ikke tidligere brugt fri variabel indsat. Der findes et element i domænet, der ifølge induktionshypotesen gør $\beta^\sigma = \bot$ og dermed $(\forall x\beta)^\sigma = \bot$.

Det er vist, at enhver formel er tilfredsstillet under σ, hvis den tilhører $\cup\Gamma$ og at enhver formel, der tilhører $\cup\Delta$, ikke er tilfredsstillet under σ. Altså er S ikke tilfredsstillet under σ, og da der findes en interpretation, hvorunder sekventen S ikke er tilfredsstillet, er S ikke logisk sand. Det må derfor gælde, at enten er S beviselig eller ikke logisk sand. Hermed er fuldstændigheden af **G** vist.

2.4 Ækvivalensen mellem H og $\mathbf{G_e}$

I dette afsnit anskueliggøres ækvivalensen mellem kalkylerne **H** og $\mathbf{G_e}$. Et bevis af denne ækvivalens består af to trin:

1. Vis, at alle aksiomer i **H** kan omskrives til logisk sande sekventer, samt at Modus Ponens svarer til en gyldig slutningsregel i $\mathbf{G_e}$.

2. Vis, at aksiomerne i $\mathbf{G_e}$ kan omskrives til logisk sande formler i **H** samt at slutningsreglerne i $\mathbf{G_e}$ svarer til gyldige sætninger om beviser i **H**.

Et stringent bevis af dette er ikke specielt vanskeligt, men en del af beviset, trin 2, er noget omstændeligt.

Vi begrænser os til under trin 1 at vise, at aksiom I og VI i **H** svarer til logisk sande sekventer i $\mathbf{G_e}$ og at MP er en gyldig slutningsregel i $\mathbf{G_e}$.

Aksiom I har formen $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$ i **H**. I $\mathbf{G_e}$ skal vi derfor vise, at sekventen $\to \alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$ er en logisk sand sekvent. Da sekventen er $\mathbf{G_e}$-beviselig, se figur 2.9, følger der af $\mathbf{G_e}$'s sundhed, at sekventen er logisk sand.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \to \alpha}{\alpha, \beta \to \alpha}\;U_v}{\alpha \to \beta \Rightarrow \alpha}\;\Rightarrow_h}{\to \alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)}\;\Rightarrow_h$$

Figur 2.9 Bevis for sekventen svarende til aksiom I.

At aksiom VI i **H** svarer til en logisk sand sekvent i $\mathbf{G_e}$ får vi ved at finde et $\mathbf{G_e}$-bevis af sekventen $\to \forall x\alpha \Rightarrow \alpha(x/t)$, se figur 2.10, hvorefter det af sundheden igen følger, at sekventen er logisk sand.

$$\dfrac{\dfrac{\alpha(x/t) \to \alpha(x/t)}{\forall x\alpha \to \alpha(x/t)}\;\forall_v}{\to \forall x\alpha \Rightarrow \alpha(x/t)}\;\Rightarrow_h$$

Figur 2.10 Bevis for sekventen svarende til aksiom VI.

Et bevis for, at MP er gyldig i $\mathbf{G_e}$, får vi ved følgende. Ved brug af MP i **H** er formlerne α og $\alpha \Rightarrow \beta$ givet som præmisserne. Dette svarer til, at sekventerne $\to \alpha$ og $\to \alpha \Rightarrow \beta$ er givet som præmisser i et $\mathbf{G_e}$-bevis. Da kan MP repræsenteres i $\mathbf{G_e}$ ved et snit, se figur 2.11. Det er nu skitseret, hvordan det bevises, at der til enhver **H**-formel svarer en logisk sand sekvent i $\mathbf{G_e}$.

$$\dfrac{\to \alpha \qquad \dfrac{\to \alpha \Rightarrow \beta}{\alpha \to \beta}\;\Rightarrow_{h,slet}}{\to \beta}\;Sn$$

Figur 2.11 MP repræsenteret i $\mathbf{G_e}$. Udledningen af 'slet'-regler er gennemgået på side 34.

For at skitsere et bevis for trin 2 vises det, at slutningsreglerne $\Rightarrow_h$ og $\wedge_v$ er gyldige i **H**. Hvis en slutningsregel i $\mathbf{G_e}$ skal repræsenteres i **H**, bruger vi den intuitive udlægning af sekventen $\Gamma \to \beta, \gamma$, hvorved vi i **H** får, at $\Gamma \vdash_{\mathbf{H}} \beta$ eller $\Gamma \vdash_{\mathbf{H}} \gamma$.[30]

[30] For de intuitive tolkninger af sekventer se side 27.

Ud fra denne tolkning af en sekvent udtrykker slutningsreglerne udtynding, kontraktion og ombytning trivielle egenskaber ved bevissymbolet $\vdash_{\mathbf{H}}$.

Slutningsreglen $\Rightarrow_h$ følger af deduktionssætningen (se side 19), da der ifølge deduktionssætningen gælder, at $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{H}} \beta$ medfører $\Gamma \vdash_{\mathbf{H}} \alpha \Rightarrow \beta$, som på sekventform er reglen:

$$\frac{\Gamma, \alpha \rightarrow \beta}{\Gamma \rightarrow \alpha \Rightarrow \beta}\text{, der netop er reglen } \Rightarrow_h .$$

$\wedge_v$ svarer i **H** til et bevis af (i) at $\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{H}} \delta$ medfører $\alpha \wedge \beta, \Gamma \vdash_{\mathbf{H}} \delta$. Det vises let i **H**, at $\vdash_{\mathbf{H}} \alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha$, hvorved et bevis af (i) under antagelse af $\alpha, \Gamma \vdash_{\mathbf{H}} \delta$ ser ud som angivet på figur 2.12.

1.	$\alpha \wedge \beta$	(Præmis)
2.	$\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha$	(**H**-formel)
3.	α	(MP)
4.	Γ	(Præmis)
. . .		(Antagelse)
$n.$	δ	

Figur 2.12 Bevis for at $\wedge_v$ kan vises i **H**.

Hermed er ækvivalensen mellem **H** og $\mathbf{G_e}$ anskueliggjort, og som nævnt ovenfor er det ikke specielt vanskeligt at give et bevis af denne ækvivalens ud i alle detaljer.

LUKKET MED $\beta(x_3)$

$$\Pi_4, \beta(x_1), \beta(x_2), \alpha(x_1), \alpha(x_2), \beta(x_3) \rightarrow \beta(x_3), \Lambda_3 \ (\Rightarrow \text{ i ant.})$$

LUKKET MED $\alpha(x_3)$

$$\Pi_4, \beta(x_1), \beta(x_2), \alpha(x_1), \alpha(x_2), \alpha(x_4) \Rightarrow \beta(x_4), \alpha(x_3) \rightarrow \alpha(x_3), \beta(x_3), \Lambda_3 \ (\forall \text{ i ant.})$$

$$\Pi_4, \beta(x_1), \beta(x_2), \alpha(x_1), \alpha(x_2) \rightarrow \alpha(x_3), \beta(x_3), \Lambda_3 \ (\Rightarrow \text{ i ant.})$$

$$\Pi_4, \beta(x_1), \beta(x_2), \alpha(x_1), \alpha(x_2), \alpha(x_3) \Rightarrow \beta(x_3) \rightarrow \beta(x_3), \Lambda_3 \ (\forall \text{ i ant.})$$

$$\Pi_4, \beta(x_1), \beta(x_2), \alpha(x_1) \rightarrow \beta(x_3), \Lambda_3 \ (\Rightarrow \text{ i ant.})$$

LUKKET MED $\alpha(x_2)$

$$\Pi_4, \beta(x_1), \alpha(x_1), \alpha(x_3) \Rightarrow \beta(x_3), \alpha(x_2) \rightarrow \alpha(x_2), \beta(x_3), \Lambda_3 \ (\forall \text{ i ant.})$$

$$\Pi_4, \beta(x_1), \alpha(x_1) \rightarrow \alpha(x_2), \beta(x_3), \Lambda_3 \ (\Rightarrow \text{ i ant.})$$

$$\Pi_3, \beta(x_1), \alpha(x_2) \Rightarrow \beta(x_2), \alpha(x_1) \rightarrow \beta(x_3), \Lambda_3 \qquad (\forall \text{ i suc.})$$

$$\Pi_3, \beta(x_1), \alpha(x_2) \Rightarrow \beta(x_2), \alpha(x_1) \rightarrow \forall x\beta, \Lambda_2 \qquad (\forall \text{ i ant.})$$

$$\Pi_2, \beta(x_1), \forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta, \Lambda_2 \qquad (\Rightarrow \text{ i suc.})$$

$$\Pi_2, \beta(x_1) \rightarrow \forall x\alpha \Rightarrow \forall x\beta, \Lambda_1 \ (\Rightarrow \text{ i ant.})$$

LUKKET MED $\alpha(x_1)$

$$\Pi_3, \alpha(x_2) \Rightarrow \beta(x_2), \alpha(x_1) \rightarrow \forall x\beta, \alpha(x_1), \Lambda_2 \qquad (\forall \text{ i ant.})$$

$$\Pi_2, \forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta, \alpha(x_1), \Lambda_2 \qquad (\Rightarrow \text{ i suc.})$$

$$\Pi_2 \rightarrow \alpha(x_1), \forall x\alpha \Rightarrow \forall x\beta, \Lambda_1 \ (\Rightarrow \text{ i ant.})$$

$$\Pi_1, \alpha(x_1) \Rightarrow \beta(x_1) \rightarrow \forall x\alpha \Rightarrow \forall x\beta, \Lambda_1 \ (\forall \text{ i ant.})$$

$$\forall x(\alpha \Rightarrow \beta) \rightarrow \forall x\alpha \Rightarrow \forall x\beta, \Lambda_1 \ (\Rightarrow \text{ i suc.})$$

$$\rightarrow \forall x(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\forall x\alpha \Rightarrow \forall x\beta)$$

Figur 2.13 Eksempel på et reduktionstræ, hvor alle grene lukker. Da $\rightarrow \forall x\ (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\forall x\ \alpha \Rightarrow \forall x\ \beta)$ svarer til aksiom IV i prædikatkalkylen **H** (se definition 2.2.2 side 18) $\forall x\ (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\forall x\ \alpha \Rightarrow \forall x\ \beta)$ er beviseligheden af $\rightarrow \forall x\ (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\forall x\ \alpha \Rightarrow \forall x\ \beta)$ i **G** ikke overraskende.

Kapitel 3

Ufuldstændighed af PA

I det foregående kapitel viste vi den semantiske fuldstændighed af prædikatlogikken. I dette kapitel vil vi på et overordnet plan vise den syntaktiske ufuldstændighed af **PA** — en formaliseret udgave af Peano-aritmetikken, teorien om de naturlige tal.

Den **syntaktiske fuldstændighed** er et helt andet begreb end den semantiske. Et aksiomatiseret system siges at være syntaktisk fuldstændigt, hvis det for alle formler α uden frie variable gælder, at α eller $\neg\alpha$ er beviselig i systemet.[1] Kalkylen **K** er syntaktisk fuldstændig, hvis det gælder, at $\vdash_{\mathbf{K}} \alpha$ eller $\vdash_{\mathbf{K}} \neg\alpha$ for enhver formel α i det sprog, som **K**-formlerne er udtrykt i.

Hilberts program gik ud på at sikre matematikkens grundlag således, at formaliseres f. eks. en ikke-formaliseret struktur i matematikken i et system **S** på en passende måde, så vil **S** omfatte alt, som er nødvendigt for formelt at bevise de formelle formler, der korresponderer til sætningerne tilhørende den ikke-formaliserede form af strukturen. Hilberts påstand var derfor, at for enhver formel α uden frie variable kan enten α eller $\neg\alpha$ før eller siden bevises i **S**. **S** vil derfor være syntaktisk fuldstændigt. Kurt GÖdel viste i 1931 med sine **ufuldstændighedssætninger**, at dette ikke er muligt, så længe strukturen mindst indeholder den del af Peano-aritmetikken, som gør det muligt at konstruere en nummerering af objekterne i **PA**, den såkaldte GÖdel-nummerering. GÖdel viste, at givet en kalkyle indeholder **PA** og er konsistent, vil den være ufuldstændig, og konsistensen af kalkylen kan ikke vises inden for kalkylen selv. Selv inden for den finite kerne i Hilberts program, kan en GÖdel-nummerering konstrueres, hvorfor Hilberts program er forbundet med grundlæggende problemer.

Hermed viste GÖdel, at Hilberts tanke om et konsistensbevis af f. eks. den formaliserede mængdelære **ZF**, der indeholder **PA**, udelukkende ved brug af 'finite' (i Hilberts forstand) argumenter var og er uopnåeligt.

3.1 Formalisering af Peano-aritmetikken

I 1889 fremlagde Peano fem postulater til karakterisering af de naturlige tal. Postulaterne samt en nyere udgave formuleret i $\mathcal{L}_1$, hvor addition og multiplikation er inkluderet, findes i appendiks A. Med addition og multiplikation udgør postulaterne Peano-aritmetikken.

Den formaliserede udgave af Peano-aritmetikken **PA** fås kort fortalt ved at udvide $\mathbf{G_e}$ med nogle ekstra initialsekventer samt en ny slutningsregel. Udvidelsen korresponderer til den nye udgave af Peanos postulater.

PA er formuleret i sproget $\mathcal{L}_N$, der indeholder nye funktionssymboler, så vi kan symbolisere eksempelvis operationerne addition og multiplikation.

[1] Det bør bemærkes, at enhver inkonsistent teori ifølge denne definition er syntaktisk fuldstændig.

3.1.1 DEFINITION. Sproget $\mathcal{L}_N$ defineres som det $\mathcal{L}_1$ sprog, der indeholder følgende symboler:

Individsymbolet: 0

Funktionssymbolerne: S, $+$ og $\cdot$

Prædikatsymbolet: $=$ □

Da den tilsigtede interpretation er over domænet af naturlige tal, vil de formelle symboler i $\mathcal{L}_N$ svare til de naturlige tal og relationer og operationer mellem disse. Variablene i $\mathcal{L}_N$ betragtes derfor som talvariable, og til et naturligt tal n i domænet svarer der en term $S \dots S0$ (n S'er foran 0) i $\mathcal{L}_N$, også betegnet $\overline{n}$.

3.1.2 DEFINITION. **PA** opnås ved at føje induktionsprincippet, i form af en slutningsregel kaldet Ind, og følgende intitialsekventer til $\mathbf{G_e}$:

(a) Matematiske initalsekventer

$$
\begin{aligned}
&Ss = St \rightarrow s = t,\\
&Ss = 0 \rightarrow,\\
&\rightarrow s + 0 = s,\\
&\rightarrow s + St = S(s + t),\\
&\rightarrow s \cdot 0 = 0,\\
&\rightarrow s \cdot St = s \cdot t + s,
\end{aligned}
$$

hvor s og t er vilkårlige $\mathcal{L}_N$-termer.

(b) Slutningsreglen Ind

$$
\frac{\alpha(a), \Gamma \rightarrow \Delta, \alpha(Sa)}{\alpha(0), \Gamma \rightarrow \Delta, \alpha(s)}
$$

hvor a, der kaldes egenvariablen, ikke forekommer i Δ eller i antecedenten af den nedre sekvent. $\alpha(a)$ er en vilkårlig $\mathcal{L}_N$-formel, hvor $\alpha(a)$ betegner $\alpha(x/a)$ i lighed med slutningsreglerne i definition 2.33, og s er en vilkårlig $\mathcal{L}_N$-term. α kaldes induktionsformlen og graden af en induktionsslutning er graden af induktionsformlen. □

PA er en omfattende teori, hvor de egenskaber, vi kender fra Peano-aritmetikken, er repræsenteret. For eksempel kan kommutativitet og associativitet af operationen $+$ vises i **PA**, nemlig ved at vise, at hhv. sekventerne $\rightarrow a + b = b + a$ og $\rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$ er beviselige i **PA**.

Når antecedenten er tom, vil vi fremover – for at lette på notationen – skrive $\vdash_{\mathbf{PA}} \alpha$ i stedet for $\vdash_{\mathbf{PA}} \rightarrow \alpha$ og dermed sige, at formlen α, i stedet for sekventen $\rightarrow \alpha$, er beviselig i **PA**.

3.2 Ufuldstændighedssætningerne $\boldsymbol{G\ddot{o}d_1}$ og $\boldsymbol{G\ddot{o}d_2}$

I det følgende arbejder vi for at opnå et så generelt resultat som muligt, med en tilfældig, fastholdt udvidelse af **PA**, kaldet **ekstensionen**. Et system **S** siges at være en ekstension af **PA**, hvis det gælder for enhver formel α, at $\vdash_{\mathbf{PA}} \alpha$ medfører $\vdash_{\mathbf{S}} \alpha$.

Det eneste vi har brug for i beviserne for $G\ddot{o}d_1$ og $G\ddot{o}d_2$, der ikke er indeholdt i prædikatlogikken, er de **primitive rekursive** funktioner. Disse skal benyttes til at konstruere et prædikat, der hævder beviselighed. Prædikatet kaldes $Bev_{\mathbf{S}}(x, y)$, som læses 'x er et bevis for y i **S**'.

3.2.1 Primitive rekursive funktioner

De primitive rekursive (PR) funktioner er (løst sagt) funktioner på de naturlige tal opnået ved rekursion. Denne rekursion er defineret ved nogle initialfunktioner, der udgør en basis, samt nogle regler for, hvordan der ud fra initialfunktionerne kan genereres nye funktioner. De primitive rekursive funktioner siges at være beregnelige, da funktionsværdien for et givet input altid kan 'regnes ud'.[2]

3.2.1 Definition. Følgende tre funktioner er primitive rekursive initialfunktioner:

(a) $Z(x) = 0$ nul,

(b) $S(x) = x + 1$ efterfølger,

(c) $F(x_1, \dots, x_n) = x_i$ projektion, hvor $1 \leq i \leq n$.

Ud fra på forhånd givne primitive rekursive funktioner kan nye genereres efter reglerne:

(d) $f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, \dots, x_n))$ sammensætning,

(e) $f(Z(x), x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$,

$f(S(x), x_1, \dots, x_n) = h(f(x, x_1, \dots, x_n), x, x_1, \dots, x_n)$ rekursion.

I sammensætningen er f PR hvis $g, h_1, \dots, h_m$ er PR, og i rekursionen er f PR hvis både g og h er det. □

3.2.2 Eksempel. Eksempler på primitive rekursive funktioner er de konstante funktioner. $f(x) = 1$ opnås ved sammensætning, hvor g-funktionen er efterfølger-funktionen og h-funktionen er nul-funktionen. De resterende konstante funktioner opnås derefter ved iteration. Her vises, at addition er PR. Betragt rekursionen:

$$f(Z(x), n) = g(n),$$
$$f(S(x), n) = h(f(x, n), x, n).$$

I ethvert tilfælde, hvor g og h er PR vil f også være PR. Hvis $g(n) = n$ vil g være en projektion og dermed PR. h defineres som $S(F_1(x_1, x_2, x_3))$, hvor $F_1(x_1, x_2, x_3) = x_1$, og altså også er en projektion. h er en sammensætning af efterfølgerfunktionen og en projektion og dermed PR. Med definitionerne af h, S og Z indsat bliver rekursionen:

$$f(0, n) = n,$$
$$f(x + 1, n) = S(f(x, n)) = (f(x, n)) + 1.$$

Funktionssymbolet '+' kan defineres som $f(n, m) = n + m$, hvorved der fås

$$0 + n = n,$$
$$(x + 1) + n = (x + n) + 1,$$

hvilket svarer til definitionen af addition i appendiks A. Det er således vist, at addition er en PR funktion. Ligeledes kan det let vises, at multiplikation er PR.[3] □

3.2.2 Repræsentérbarhed

Vi siger, at funktionen f kan repræsenteres i **PA**, hvis der findes et formelt funktionsudtryk $\overline{f}$ sådan, at det for alle n, m gælder, at:

$$f(n) = m \text{ hviss } \vdash_{\mathbf{PA}} \overline{f}(\overline{n}) \equiv \overline{m}.$$

Vi skelner her mellem formelle og uformelle udtryk ved, at det formelle udtryk (funktionssymbolet) for en primitiv rekursiv funktion f betegnes ved $\overline{f}$, prædikatet P betegnes formelt ved $\overline{P}$ og det naturlige tal n betegnes formelt ved dets talværdi $\overline{n}$.

[2]For en uddybning af beregnelighed se evt. [Bell & Machover, 1977; kap. 6].

[3]En liste med nogle simple PR funktioner er givet i [Kleene, 1952; pp. 222].

Da enhver primitiv rekursiv funktion kan udledes formelt i **PA**, er det klart, at de primitive rekursive funktioner kan repræsenteres i **PA**.

3.2.3 EKSEMPEL. Betragt den primitive rekursive funktion $f(x)$, der betegner det største primtal mindre end eller lig x.[4] Til at formalisere $f(x)$ har vi brug for relationen $R(x,y)$, der udtrykker, at x går op i y. $R(x,y)$ kan formelt skrives som:

$$\overline{R}(x,y) \text{ hviss } \exists z(y \equiv z \bar{\cdot} x).$$

Dernæst har vi brug for egenskaben at være et primtal

$$\overline{prim}(y) \text{ hviss } \forall x \overline{<} y(x \overline{\not\equiv}\ \overline{1} \Rightarrow \neg \overline{R}(x,y)).$$

Da bliver den formelle udgave for $f(x)$

$$y \equiv \overline{f}(x) \text{ hviss } \overline{prim}(y) \wedge \big(\forall z(z \overline{\leq} x \wedge \overline{prim}(z)\big) \Rightarrow z \overline{\leq} y) \wedge y \overline{\leq} x.$$

$f(x)$ er hermed formaliseret i **PA**, og det kan vises, at f kan repræsenteres i **PA**. □

3.2.3 Yderligere forberedelser

Vi konstruerer en injektion ind i $\mathbb{N}$ fra alle syntaktisk velformede tekststrenge. Til ethvert naturligt tal betegner vi en talværdi i det formaliserede system. Der skal nu **kodes** i **S**; ekstensionen af **PA**. Hvert symbol i **S** tildeles en kode i form af en talværdi $\overline{n}$, der er den formelle repræsentant for gÖdelnummeret n. Ligeledes tildeles formler, beviser mm. entydigt en kode. Formlen α vil tildeles talværdien $\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}$, hvor $\ulcorner \alpha \urcorner$ er gÖdelnummeret for α. Denne kodning er helt central for de kommende beviser af $Göd_1$ og $Göd_2$, men ikke desto mindre noget kedsommelig.[5] Det er denne kodning, som kaldes GÖdel-nummereringen. Substitutions-operatoren $Sub(\alpha(x),t) = \alpha(x/t)$ kan repræsenteres i **S**, da den er en primitiv rekursiv funktion. I **S** betegner vi den ved funktionssymbolet $\overline{Sub}$. For formler $\alpha(x)$ og termer t med koden $\overline{\ulcorner t \urcorner}$ gælder det:

$$\vdash_{\mathbf{S}} \overline{Sub}(\overline{\ulcorner \alpha(x) \urcorner}, \overline{\ulcorner t \urcorner}) \equiv \overline{\ulcorner \alpha(t) \urcorner}.$$

Derudover skal bevisprædikatet konstrueres. For prædikatet $Bev_{\mathbf{S}}(x,y)$ definerer vi følgende: $\vdash_{\mathbf{S}} \overline{Bev_{\mathbf{S}}}(t_1,t_2)$, hviss t_1 er koden for et bevis i **S** af formlen med koden t_2. Det følger heraf, at der eksisterer en lukket term t så $\vdash_{\mathbf{S}} \alpha$, hviss $\vdash_{\mathbf{S}} \overline{Bev_{\mathbf{S}}}(t, \overline{\ulcorner \alpha \urcorner})$.

Definerer vi dernæst

$$\overline{Be_{\mathbf{S}}}(y) \Leftrightarrow \exists x \overline{Bev_{\mathbf{S}}}(x,y),$$

opnår vi et prædikat, der hævder beviselighed i **S**.

[4] Funktionen $f(x)$ er PR, da der kun indgår begrænsede kvantorer i definitionen af f, dvs. til en hvilken som helst talværdi n kan $f(n)$ findes. Se [BELL & MACHOVER, 1977; p. 242].

[5] For en gennemgang af kodningen henviser vi til [SMORYNSKI, 1977; p. 829-836].

Kodningen af hele systemet kan udføres på en sådan måde, at følgende er opfyldt for enhver formel α uden frie variable:

(D1) $\vdash_{\mathbf{S}} \alpha$ hviss $\vdash_{\mathbf{S}} \overline{Be_{\mathbf{S}}}(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner})$.

(D2) $\vdash_{\mathbf{S}} \overline{Be_{\mathbf{S}}}(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner}) \Rightarrow \overline{Be_{\mathbf{S}}}(\overline{\ulcorner Be_{\mathbf{S}}(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner})\urcorner})$.

(D3) $\vdash_{\mathbf{S}} \overline{Be_{\mathbf{S}}}(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner}) \wedge \overline{Be_{\mathbf{S}}}(\overline{\ulcorner\alpha \Rightarrow \beta\urcorner}) \Rightarrow \overline{Be_{\mathbf{S}}}(\overline{\ulcorner\beta\urcorner})$.

D1, D2 og D3 kan betragtes som forudsætninger for beviserne af de kommende GÖdel-sætninger.[6]

3.2.4 Bevis af *Göd*$_1$ og *Göd*$_2$

Nedenstående lemma bliver brugt til at bevise GÖdels ufuldstændighedssætninger.
3.2.4 Lemma. Lad $\alpha(x)$ i **S** være en formel med kun x som fri variabel. Da findes der en formel β uden frie variable, således at:

$$\vdash_{\mathbf{S}} \beta \Leftrightarrow \alpha(\overline{\ulcorner\beta\urcorner}).$$

Bevis. Lad $\alpha(x)$ være givet og lad $\varphi(x) \Leftrightarrow \alpha(\overline{Sub}(x,x))$ være 'diagonaliseringen' af α. Lad $\overline{m} \equiv \overline{\ulcorner\varphi(x)\urcorner}$ og $\beta \equiv \varphi(\overline{m})$. Da følger det, at

$$\begin{aligned} \beta &\Leftrightarrow \varphi(\overline{m}) \Leftrightarrow \alpha(\overline{Sub}(\overline{m},\overline{m})) \\ &\Leftrightarrow \alpha(\overline{Sub}(\overline{\ulcorner\varphi(x)\urcorner},\overline{m})) \Leftrightarrow \alpha(\overline{\ulcorner\varphi(m)\urcorner}) \\ &\Leftrightarrow \alpha(\overline{\ulcorner\beta\urcorner}). \end{aligned}$$

∎

Dette lemma kaldes for **fikspunktlemmaet**, da β fungerer som en form for fikspunkt for α. Beviset for ufuldstændighedssætningerne er næsten udelukkende syntaktisk. Det eneste begreb vi gør brug af, ud over syntaks, er begrebet repræsent,rbarhed.

Vi definerer nu $\alpha(x)$ som $\neg\overline{Be_{\mathbf{S}}}(x)$, og er derfor i stand til at vise følgende:

3.2.5 Sætning. *Göd*$_1$. Der findes en formel δ således at:

(i) $\nvdash_{\mathbf{S}} \delta$,

(ii) $\nvdash_{\mathbf{S}} \neg\delta$.

Bevis. Lad δ være formlen uden frie variable, som er fikspunktet for $\neg\overline{Be_{\mathbf{S}}}(x)$. Det gælder da, at $\vdash_{\mathbf{S}} \delta \Leftrightarrow \neg\overline{Be_{\mathbf{S}}}(\overline{\ulcorner\delta\urcorner})$.

(i) Antag $\vdash_{\mathbf{S}} \delta$. Da følger det af D1, at $\vdash_{\mathbf{S}} \overline{Be_{\mathbf{S}}}(\overline{\ulcorner\delta\urcorner})$. Men af fikspunktlemmaet følger det, at $\vdash_{\mathbf{S}} \delta$ medfører $\vdash_{\mathbf{S}} \neg\overline{Be_{\mathbf{S}}}(\overline{\ulcorner\delta\urcorner})$. Dette er i modstrid med antagelsen om, at **S** er konsistent.

(ii) Antag $\vdash_{\mathbf{S}} \neg\delta$. Da følger det af fikspunktlemmaet, at $\vdash_{\mathbf{S}} \neg\neg\overline{Be_{\mathbf{S}}}(\overline{\ulcorner\delta\urcorner})$, hvorefter D1 giver $\vdash_{\mathbf{S}} \delta$. Dette er igen i modstrid med, at **S** er konsistent. ∎

Vi sætter nu α til at være $(\overline{0} \equiv \overline{1})$ og definerer $\overline{Kon_{\mathbf{S}}}$ som $\neg\overline{Be_{\mathbf{S}}}(\alpha)$. Hvis vi kunne bevise $\overline{Kon_{\mathbf{S}}}$ i **S**, vil vi ifølge Hilbert have bevist konsistensen af **S**. Men det kan vi ikke, tværtimod kan vi vise følgende:

3.2.6 Sætning. *Göd*$_2$. Der gælder om $\overline{Kon_{\mathbf{S}}}$, at

$$\nvdash_{\mathbf{S}} \overline{Kon_{\mathbf{S}}}. \tag{3.1}$$

[6] Biimplikationen i D1 gælder dog kun under visse omstændigheder. For en diskussion af dette og bevis af D1, D2 og D3 se [Smorynski, 1977; pp. 827]. D1, D2 og D3 er iøvrigt også vist i ovenstående form i [Takeuti, 1987; p. 83].

Denne sætning følger af $Göd_1$, samt D1, D2 og D3. Et bevis af dette vil i denne sammenhæng være for omfattende.[7]

3.2.5 Konsekvenser af $Göd_1$ og $Göd_2$ for Hilberts program

Ovenstående resultat kan generaliseres til andre teorier, når blot teorien indeholder den primitive rekursive aritmetik (PRA), således at fikspunktlemmaet kan vises. Vi kan sige, at hvis **S'** er en formaliseret aksiomatisk teori, der er mindst lige så 'stærk' som PRA, og hvis **S'** er konsistent, da kan konsistensen af **S'** ikke vises i **S'**. Dette følger direkte af $Göd_2$. Derved ødelægges Hilberts program i sin oprindelige form ‚n gang for alle. Hilberts tanke om at sikre og godtgøre idealmatematikken inden for et formelt system udelukkende ved brug af den 'finite' matematik, der svarer til den primitive rekursive aritmetik, kan således ikke lade sig gøre. Skal konsistensen af f. eks. **ZF**, dvs. et system, der indeholder en aktuel uendelighed, vises, må midler og argumenter uden for **ZF** tages i brug, og disse midler og argumenter må – efter udførelsen af et konsistensbevis – tages under en nøje behandling.

GÖdel skriver:

≫... it is conceivable that there exist finitary proofs that cannot be expressed in the formalism of P.≪ [GÖDEL, 1931; p. 195],

hvor P er vores **S**. De finite konsistensbeviser slutter altså ikke ved $Göd_2$. Derimod viser $Göd_2$ nærmest vejen, som skal lede frem til konsistensbeviserne: Søg ikke-elementære metoder, som ikke desto mindre kan betragtes som værende finite. Hilberts tanker omkring brugen af endelige metoder er derfor stadigvæk aktuelle, idet metoder, der ikke gør brug af en absolut uendelighed, er et rimeligt krav.

[7] En gennemgang findes i [SMORYNSKI; 1977].

Kapitel 4

Gentzens konsistensbevis for PA

Vi vil nu se, hvordan en passende udvidelse af finitisme-begrebet, på trods af GÖdels 2. ufuldstændighedssætning, vil gøre os i stand til at vise konsistensen af den formaliserede Peano-aritmetik, **PA**. Det oprindelige konsistensbevis for **PA** blev givet af Gerhard Gentzen i 1936 — fem år efter GÖdels bevis af $Göd_2$.[1]

Set i lyset af $Göd_2$ er det naturligvis yderst interessant at se, hvad der sætter os i stand til at bevise konsistensen af **PA**. Den grundlæggende id, i beviset er at konstruere ordinaltal, som korresponderer entydigt til kompleksiteten af hvert bevis i **PA**.[2] Disse ordinaltal lader sig ikke formalisere i **PA**, og det er lige netop det faktum, der giver os styrken til at give et konsistensbevis, der ikke er i modstrid med $Göd_2$. I en undersøgelse af bevisets 'troværdighed' er det derfor helt centralt at give en omhyggelig vurdering af konstruktionen af disse ordinaltal, da konsistensbeviset for **PA** skal være konstruktivt. Der gives i afsnit 4.1 en repræsentation af de konstruktive ordinaltal, der overskrider **PA**-formalismen i forbindelse med den såkaldte transfinite rekursion, der er den centrale del af beviset.

Ydermere er det interessant at se, hvor i beviset vi overskrider Hilberts finitisme, og om beviset, efter en revidering af denne finitisme, kan betragtes som værende finit. Som tidligere nævnt svarer Hilberts finitisme til formaliseringen af primitiv rekursiv aritmetik, **PRA**. Om Hilberts finitisme kan karakteriseres ved **PRA** er et tolkningsspørgsmål, da Hilbert aldrig var helt eksplicit med sin finitisme, men synspunktet kan findes mange steder i litteraturen bla. [Takeuti, 1987], [Smorynski, 1977] og [Simpson, 1988].

4.1 De konstruktive ordinaltal mindre end ε_0

I den generelle mængdelære **ZFAC**[3] kan ordinaltallene repræsenteres flot og elegant ved det, der kaldes von Neumann repræsentationen. Denne er efterhånden blevet standard og er formuleret i appendiks B. Til vores konsistensbevis af **PA** ønsker vi naturligvis at medtage så lidt som muligt, der ikke kan formaliseres inden for **PRA**, hvorfor vi ikke har Zermelo-Fraenkels aksiomer til vores rådighed. I stedet må vi give en rekursiv definition, og derfor kan vores ordinaltals repræsentation virke lidt omstændelig.

I det følgende introducerer vi bla. symbolerne 0, + og ω. Disse skal tolkes rent formelt, uden

[1] Den version af beviset, vi har valgt at gå frem efter, er givet i [Takeuti, 1987; pp. 97].

[2] Bemærk brugen af ordet bevis i denne sætning. Det første bevis (konsistensbeviset) er et metabevis, hvorimod beviserne i **PA** er objektbeviser.

[3] Zermelo-Fraenkels aksiomer samt Axiom of Choice (Udvalgsaksiomet).

at man skal associere til noget særligt, såsom at forstå ω som et eller andet 'uendeligt tal'.[4] Ordinaltalsrepræsentationen skal forstås som en algoritme eller en procedure til at repræsentere de konstruktive ordinaltal mindre end ε_0, dvs. som en manipulation af konkrete objekter.

Vi definerer de konstruktive ordinaltal til at være de objekter, der opnås ved følgende rekursion:

1. 0 er et ordinaltal.

2. Givet ordinaltallene $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, da er ω^μ og $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n$ ordinaltal.

Ordinaltal defineret på denne måde er konstruktive, da de er konstrueret ud fra ordinaltallet 0 og et **endeligt** antal skridt af type 2 i rekursionen.

Sætter vi ω^0 til at være lig 1, ser vi, at de naturlige tal er indeholdt i de konstruktive ordinaltal. Følgen hedder da $0, \omega^0, \omega^0 + \omega^0, \ldots$ svarende til de naturlige tal. I von Neumann repræsentationen ender følgen i limes-tallet ω, der således repræsenterer en aktuel uendelighed. Der findes ikke limestal i de konstruktive ordinaltal, da de ikke vil kunne konstrueres ud fra et endeligt antal skridt. Rent uformelt vil ω^{ω^0} kunne ses som svarende til limes-tallet ω, men ω^{ω^0} forstås efter ovenstående definition som et konkret konstrueret objekt, der ikke har nogen egentlig fortolkning.

I Gentzens konsistensbevis bruges kun den del af de konstruktive ordinaltal, der er mindre end ordinaltallet ε_0, givet ved

$$\varepsilon_0 = \left.\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}\right\} \ \omega \ \text{ gange.}$$

Vi vil nu definere relationen $<$ samt operationerne $\cdot$ og $+$. Disse besidder samme egenskaber, som vi kender dem fra mængdelæren, da eksempelvis $+$ ikke er kommutativ (se evt. appendiks B). Først relationerne:

(1) $<$ er en lineær ordning og 0 er dens mindste element.

(2) $\omega^\mu < \omega^\nu$ hviss $\mu < \nu$.

Definitionen af $<$ kan endnu ikke bruges til at ordne alle ordinaltal, da relationen kun kan sammenligne ordinaltal bestående af ,t led. Det kan f. eks. afgøres, at $\omega^0 < \omega^{\omega^0}$, men ikke om $\omega^0 < \omega^0 + \omega^0$. Dette bliver først muligt efter (7).

Dernæst definerer vi følgende, der gør det nemmere at håndtere ordinaltallene:

(3) Lad $\mu \neq 0$ være et ordinaltal indeholdende en forekomst af 0. Lad μ' være ordinaltallet, der fås fra μ ved at slette 0 og den overflødige forekomst af $+$. Så er $\mu = \mu'$. Hvis f. eks. $\mu = \mu_1 + \mu_2 + 0 + \mu_3$ og $\mu' = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ er $\mu = \mu'$.

(4) Ud fra den rekursive ordinaltalsdefinition ses det, at ethvert ordinaltal forskelligt fra 0 kan skrives på formen

$$\omega^{\mu_1} + \omega^{\mu_2} + \cdots + \omega^{\mu_n}, \tag{4.1}$$

hvor ethvert μ_i ligeledes kan skrives på formen (4.1), givet $\mu_i \neq 0$. Hvert led ω^{μ_i} kaldes en **monomial** af ordinaltallet.

Summen af to ordinaltal kan nu defineres:

[4] Vil vi alligevel have en vis forståelse af ω, siger vi inden for **ZFAC**, at ω er limes-tallet for følgen af de naturlige tal $0, 1, 2, \ldots$

(5) Lad $\mu = \omega^{\mu_1} + \omega^{\mu_2} + \cdots + \omega^{\mu_k}$ og $\nu = \omega^{\nu_1} + \omega^{\nu_2} + \cdots + \omega^{\nu_j}$.
Så er $\mu + \nu = \omega^{\mu_1} + \omega^{\mu_2} + \cdots + \omega^{\mu_k} + \omega^{\nu_1} + \omega^{\nu_2} + \cdots + \omega^{\nu_j}$.

Ethvert ordinaltal kan skrives på den såkaldte normalform, der defineres i det følgende. Formen viser sig at være nyttig, når vi skal sammenligne to ordinaltal mht. ordningsrelationen $<$.

(6) Lad μ være et ordinaltal på formen (4.1), som indeholder to på hinanden følgende led ω^{μ_j} og $\omega^{\mu_{j+1}}$, hvor $\mu_j < \mu_{j+1}$. Lad μ' være et ordinaltal opnået fra μ ved at fjerne '$\omega^{\mu_j}+$'. Så er $\mu = \mu'$. Denne egenskab medfører, at $+$ ikke er kommutativ.

(7) Af (6) følger det nu, at for ethvert ordinaltal $\mu \neq 0$ eksisterer der et ordinaltal på formen

$$\omega^{\mu_1} + \omega^{\mu_2} + \cdots + \omega^{\mu_n},$$

hvor $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n$, sådan at $\mu = \omega^{\mu_1} + \cdots + \omega^{\mu_n}$. Dette kaldes **normalformen** af μ.

Ved hjælp af normalformen kan vi give en leksikografisk ordning af ordinaltallene. Antag, at $\mu = \omega^{\mu_1} + \cdots + \omega^{\mu_n}$ og $\nu = \omega^{\nu_1} + \cdots + \omega^{\nu_m}$ er på normalform. Fra (2) har vi, at $\mu < \nu$ hviss $((\omega^{\mu_i} < \omega^{\nu_i})$ og $(\omega^{\mu_j} = \omega^{\nu_j}$, for alle $j < i))$ eller $((n < m)$ og $(\omega^{\mu_i} = \omega^{\nu_i}$, for alle $i \leq n))$.[5]

Af (7) følger f. eks. at $\omega^0 < \omega^0 + \omega^0$, da $\mu_1 = 0$, $\nu_1 = 0$ og $\nu_2 = 0$ giver $n < m$ og $\omega^{\mu_i} = \omega^{\nu_i}$ for alle $i \leq m = 1$.

Dernæst definerer vi produktet af to ordinaltal:

(8) Lad μ være på normalform og lad $\nu > 0$. Så er $\mu \cdot \omega^\nu = \omega^{\mu_1 + \nu}$. I tilfældet hvor $\nu = 0$ defineres $\mu \cdot \omega^0 = \mu$.

(9) Lad μ og ν være som i (5). Så er

$$\mu \cdot \nu = \mu \cdot \omega^{\nu_1} + \mu \cdot \omega^{\nu_2} + \cdots + \mu \cdot \omega^{\nu_j}.$$

(10) $(\omega^\mu)^n$ defineres for ethvert naturligt tal n som $\omega^\mu \cdot \cdots \cdot \omega^\mu$ (n gange), hvilket ifølge (8) er lig med $\omega^{\mu + \cdots + \mu \ (n \text{ gange})}$. Af (8) følger, at hvert μ kan skrives $\mu \cdot \omega^0$ og dermed, at $\mu + \cdots + \mu$ (n gange) er lig med $\mu \cdot \omega^0 + \cdots + \mu \cdot \omega^0$ (n gange). Ifølge (9) er dette lig med $\mu \cdot (\omega^0 + \cdots + \omega^0 \ \ (n \text{ gange}))$. Hermed må $(\omega^\mu)^n = \omega^{\mu \cdot n}$. Det blev i udregningen benyttet, at det naturlige tal n kan skrives som det konstruktive ordinaltal $\omega^0 + \cdots + \omega^0 \ \ (n$ gange).

4.1.1 Eksempel. Det vises nu, at $\cdot$ ikke er kommutativ. Betragt først $2 \cdot \omega^{\omega^0} = (\omega^0 + \omega^0) \cdot \omega^{\omega^0}$. Dette er ifølge (8) lig med $\omega^{0+\omega^0}$, dvs. ω^{ω^0}. Omvendt vil $\omega^{\omega^0} \cdot 2 = \omega^{\omega^0} \cdot (\omega^0 + \omega^0)$ ifølge (9) være $\omega^{\omega^0} \cdot \omega^0 + \omega^{\omega^0} \cdot \omega^0$, der er lig med $\omega^{\omega^0} + \omega^{\omega^0}$. Altså er $(\omega^0 + \omega^0) \cdot \omega^0 \neq \omega^0 \cdot (\omega^0 + \omega^0)$ og $2 \cdot \omega^{\omega^0} \neq \omega^{\omega^0} \cdot 2$. $\square$

Sluttelig definerer vi den **naturlige** sum $\#$. Dette er en lidt speciel operation, som ikke findes i von Neumann repræsentationen. Vi indfører den, fordi vi ønsker kommutativitet af sum-operationen, hvilket vi ikke får af $+$ som defineret under (5).

(11) Lad μ og ν være ordinaltal givet på deres normalform, dvs.

$$\mu = \omega^{\mu_1} + \omega^{\mu_2} + \cdots + \omega^{\mu_m} \quad \text{og} \quad \nu = \omega^{\nu_1} + \omega^{\nu_2} + \cdots + \omega^{\nu_n}. \tag{4.2}$$

Da er $\mu \# \nu = \omega^{\lambda_1} + \omega^{\lambda_2} + \cdots + \omega^{\lambda_{n+m}}$, hvor $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+m}\} = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \nu_1, \nu_2, \ldots\}$ og $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{n+m}$. Vi siger, at $\mu \# \nu$ er den naturlige sum af μ og ν.

De konstruktive ordinaltal mindre end ε_0 er nu karakteriseret. Et vigtigt resultat er, at ethvert af disse ordinaltal kan skrives på en normalform, der gør sammenligning af to ordinaltal med relationen $<$ til en konstruktiv metode. Operationerne $\cdot$ og $+$ er også defineret, så de udføres konstruktivt.

[5] Symbolet $\leq$ er udtryk for en ordning af de naturlige tal og skal derfor ikke forveksles med f. eks. symbolet $<$ defineret for ordinaltal i dette afsnit.

4.2 Skitsering af beviset

Gentzens konstruktive bevis for konsistensen af Peano-aritmetikken kan skitseres på følgende vis:

(1) Det vises i afsnit 4.3, at enhver nedadstigende kæde startende med et konstruktivt ordinaltal mindre end ε_0 vil terminere. Da har vi en konstruktiv velordning af ordinaltallene. Velordningen vises ved brug af de såkaldte **ordinaltals-eliminatorer**.

(2) Derefter gives der i afsnit 4.4 en procedure til entydigt at tildele ethvert bevis i **PA** et konstruktivt ordinaltal mindre end ε_0.

(3) Vi ved, at **PA** er inkonsistent, hviss der findes et bevis i **PA** af den tomme sekvent. Givet et bevis $\mathfrak{B}_{\rightarrow}$ af den tomme sekvent gives en algoritme, **de forberedende skridt**, der omskriver afslutningen af $\mathfrak{B}_{\rightarrow}$ således, at der i afslutningen af det omskrevne bevis $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$ ikke findes åbne termer, logiske initialsekventer eller brug af slutningsreglerne Ind og U. Algoritmen gives i afsnit 4.5.

(4) Ydermere findes der efter de forberedende skridt i afslutningen af $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$ et specielt snit, kaldet **det passende snit**. Dette vises i afsnit 4.6.

(5) Der defineres nu i afsnit 4.7 en reduktion af $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$, kaldet **den essentielle reduktion**. Eksistensen af et passende snit i afslutningen af $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$ er en forudsætning for den essentielle reduktion. Der gælder om denne reduktion, at ordinaltallet for det reducerede bevis $\mathfrak{B}''_{\rightarrow}$ er lavere end ordinaltallet for $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$, samt at slutsekventen er den samme. Det sikres, at der altid igen vil kunne foretages en essentiel reduktion på det reducerede bevis af den tomme sekvent.

(6) Da $\mathfrak{B}''_{\rightarrow}$, ligesom $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$ og $\mathfrak{B}_{\rightarrow}$, er et bevis af den tomme sekvent, vil en kæde af reducerede beviser (af den tomme sekvent) med faldende ordinaltal kunne konstrueres. Da den essentielle reduktion kan gentages vilkårligt ofte, vil kæden af de nedadstigende ordinaltal – tilhørende de reducerede beviser – fortsætte uden at terminere. Dette vil være i modstrid med, hvad der blev vist under (1), nemlig at enhver nedadstigende kæde af konstruktive ordinaltal begyndende med et tal mindre end ε_0 vil være endelig. Dermed er det vist, at der i **PA** ikke findes et bevis af den tomme sekvent, og at **PA** derfor er konsistent.

4.3 Ordinaltals-eliminatorer

Vi vil nu vise, at enhver nedadstigende kæde begyndende med et ordinaltal mindre end ε_0 vil terminere, dvs. er endelig. Kan vi vise dette, vil vi have vist, at ordinaltallene mindre end ε_0 er velordnede, og at de derfor vil udgøre en fornuftig basis for konsistensbeviset. Lad $b_0 > b_1 > \dots$ være en strengt aftagende følge.

(I) Antag, at $b_0 < \omega$ eller b_0 er et naturligt tal. Se på en aftagende følge, som starter med et givet naturligt tal. Ved at skrive dens første n led op ses det, at følgens længde er højst $n+1$. Da enhver strengt nedadstigende følge af naturlige tal vil terminere, kan vi derfor i det følgende gå ud fra, at b_0 ikke er et naturligt tal.

Antag, at ethvert b_i i $b_0 > b_1 > \dots$ er skrevet på formen

$$\omega^{\mu_1^i} + \omega^{\mu_2^i} + \cdots + \omega^{\mu_{n_i}^i} + k_i, \tag{4.3}$$

hvor $\mu_j^i > 0$ og k_i er et naturligt tal. Dette kaldes den **kanoniske form** af b_1. Vi kalder

$$\omega^{\mu_1^i} + \omega^{\mu_2^i} + \cdots + \omega^{\mu_{n_i}^i}$$

for **1-hoveddelen** af b_i. En følge, hvori k_i ikke optræder for noget b_i, kaldes en **1-følge**.

Vi vil nu beskrive en procedure, der til en givet aftagende følge $b_0 > b_1 > \dots$, hvor b_i er skrevet på den kanoniske form (4.3), producerer en aftagende 1-følge $c_0 > c_1 > \dots$, som opfylder, at

- c_0 er 1-hoveddelen af b_0.
- Vi kan vise, at hvis $c_0 > c_1 > \dots$ er en endelig (terminerende) følge, så er $b_0 > b_1 > \dots$ det ligeledes.

Proceduren giver os ud fra en følge b, en følge c ved at eliminere nogle led i b-følgen. Følgen c er derved blevet simplere end b-følgen.

Proceduren, som vi kalder en **1-eliminator**, er også givet rekursivt:

Sæt $b_i = b'_i + k_i$, hvor b'_i er 1-hoveddelen af b_i. Så kan $b_0 > b_1 > \dots$ skrives som $b'_0 + k_0 > b'_1 + k_1 > \dots$ Sæt nu $c_0 = b'_0$. Antag, at $c_0 > c_1 > \dots > c_m$ er konstrueret på en sådan måde, at c_m er b'_j. Så gælder enten, at $b'_j = b'_{j+1} = \dots = b'_{j+p}$ og b_{j+p} er det sidste led i følgen, eller $b'_j = b'_{j+1} = \dots = b'_{j+p} > b'_{j+p+1}$. Dette gælder, fordi $b'_j = b'_{j+1} = \dots = b'_{j+p} = \dots$ implicerer, at $k_j > k_{j+1} > \dots > k_{j+p+1} > \dots$, der er en følge af naturlige tal, og som ifølge I derfor vil terminere. Derfor vil enten hele følgen terminere, eller det vil gælde at $b'_{j+p} > b'_{j+p+1}$. Hvis det første er tilfældet, er vi færdige. Hvis det andet er tilfældet, sæt $c_{m+1} = b'_{j+p+1}$.

Det følger af ovenstående, at givet en endelig følge $c_0 > c_1 > \dots > c_m$, så giver konstruktionen af c_{m+1}, at den originale b-følge er endelig. Dette kan man overbevise sig om ved at antage, at c-følgen er endelig men at b-følgen ikke er det, hvorved en modstrid fås.

(II) Givet en aftagende følge $b_0 > b_1 > \dots$, hvor $b_0 < \omega^2$. Ved anvendelse af en 1-eliminator på denne følge kan vi konstruere en 1-følge $c_0 > c_1 > \dots$, hvor $c_0 \leq b_0$. Så kan $c_0 > c_1 > \dots$ skrives på formen $\omega \cdot k_0 > \omega \cdot k_1 \dots$, hvilket medfører, at $k_0 > k_1 > \dots$ Ved (I) ser vi da, at $k_0 > k_1 > \dots$ må være endelig, hvilket medfører, at $c_0 > c_1 > \dots$ og $b_0 > b_1 > \dots$ er endelige.

Vi vil nu definere en **n-følge** således: Lad $b_0 > b_1 > \dots$ være en aftagende følge på formen $b'_0 + d_0 > b'_1 + d_1 \dots$ Det gælder om følgen, at hvis $b_i = b'_i + d_i$ så vil hver monomial i b'_i være $\geq \omega^n$ og hver monomial i d_i vil være $< \omega^n$, hvor vi kalder b'_i for n-hoveddelen af b_i. En sådan følge kaldes en n-følge, hvis hver d_i er tom.

Vi vil nu generalisere 1-eliminatoren og definere en **n-eliminator**, hvorom det gælder, at givet en aftagende følge $b_0 > b_1 > \dots$ produceres en n-følge $c_0 > c_1 > \dots$, som opfylder:

- c_0 er n-hoveddelen af b_0.
- Vi kan vise, at når $c_0 > c_1 > \dots$ er endelig, så er $b_0 > b_1 > \dots$ det ligeledes.

Metoden er defineret ved:

Antag (som en form for induktionshypotese) at enhver aftagende følge $e_0 > e_1 > \dots$ med $e_0 < \omega^n$ er endelig.

Sæt $b_i = b'_i + d_i$, hvor b'_i er n-hoveddelen af b_i. Lad $c_0 = b'_0$. Antag, at $c_0 > c_1 > \dots > c_m$ er konstrueret og c_m er b'_j. Hvis $b'_j = b'_{j+1} = \dots = b'_{j+p}$ og b'_{j+p} er det sidste led i den givne følge, så er vi færdige. Ellers er $b'_j = b'_{j+1} = \dots = b'_{j+p} > b'_{j+p+1}$, fordi $b'_j = b'_{j+1} = \dots = b'_{j+p} = \dots$ implicerer at $d_j > d_{j+1} \dots > d_{j+p}$, som ifølge induktionshypotesen er endelig. Det betyder, at $d_{j+p+1} \geq d_{j+p}$, som medfører at $b'_{j+p} > b'_{j+p+1}$. Defin,r da $c_{m+1} = b'_{j+p+1}$. Så vil følgen $c_0 > c_1 > \dots$ opfylde de to ovenstående punkter. For at overbevise sig selv om det, må man igennem argumenter meget lig de argumenter, der bruges under 1-eliminatoren.

(III) Ved hjælp af n-eliminatoren vil vi vise, at en aftagende følge $b_0 > b_1 > \dots$, hvor $b_0 < \omega^{n+1}$, må være endelig. Ved at anvende n–eliminatoren på følgen $b_0 > b_1 > \dots$ kan vi konstruere en n–følge $c_0 > c_1 > \dots$, hvor $c_0 \leq b_0$. b_i kan skrives som $\omega^n \cdot k_i$, hvor k_i er et naturligt tal. Så $\omega^n \cdot k_0 > \omega^n \cdot k_1 > \dots$, hvilket implicerer at $k_0 > k_1 > \dots$, som ifølge (I) er en endelig følge. Derfor er $c_0 > c_1 > \dots$ endelig, hvilket giver at $b_0 > b_1 > \dots$ er endelig.

(IV) Fra (II), som en form for induktionsbasis og (III), som et induktionstrin, kan vi konkludere, at givet et naturligt tal n, kan det vises, at enhver aftagende følge $b_0 > b_1 > \dots$, hvor $b_0 < \omega^n$ er endelig.

(V) Enhver aftagende følge $b_0 > b_1 > \dots$ er endelig hvis $b_0 < \omega^\omega$, fordi dette betyder, at $b_0 < \omega^n$, for et vist n, og da gælder (IV).

Vi har nu overbevist os selv om, at enhver nedadstigende følge af ordinaltal, der begynder med et ordinaltal mindre end ω^ω, vil terminere. Det vil sige, at ordinaltallene op til ω^ω er velordnede. At vise at ordinaltallene mindre end ε_0 er velordnede følger meget de samme linjer som ovenstående. Der skal konstrueres nye eliminatorer, der minder en del om n-eliminatorerne. Dette er dog en besværlig proces da ordinaltallenes udformning efterhånden når en vældig kompleksitet. Læseren, der efter at have nået ω^ω, ikke er overbevist om, at velordningen op til ε_0 er korrekt, henviser vi til [TAKEUTI, 1987; pp. 90], hvor en udførlig gennemgang findes.

At ordinaltallene mindre end ε_0 er velordnede føler vi os overbeviste om. Eliminatorerne giver en procedure eller en algoritme til konkret at se dette trin for trin. Dette gør, at vi kalder eliminatorerne for konstruktive, og som sådan er de en fornuftig udvidelse af Hilberts program. Bemærk, at vi på intet tidspunkt i det ovenstående har refereret til eller gjort brug af en aktuel uendelighed. Vi ser os derfor nu i stand til at præsentere et bevis for konsistensen af PA, der efter udvidelsen af Hilberts program kan betragtes som værende finit.

4.4 Tildeling af ordinaltal til sekventer og beviser

Før vi kan tildele sekventer og beviser i **PA** ordinaltal, er det nødvendigt at kunne inddele beviser i **PA** i niveauer. Hertil benytter vi graden af *Sn* og graden af *Ind*. For definition af disse se side 28 og side 46.

4.4.1 DEFINITION. **Højden** af en sekvent S er den største værdi for graderne af slutningsreglerne *Sn* og *Ind*, der forekommer under S i beviset. Højden af S i beviset $\mathfrak{B}$ betegnes $h(S; \mathfrak{B})$. □

Det følger af definitionen, at højden af enhver slutsekvent er 0.

I det følgende vil det være underforstået, at ordinaltallene er skrevet på normalform. Endvidere vil betegnelsen $\omega_n(\mu)$, for ethvert ordinaltal μ og naturligt tal n, være givet ved rekursionen: $\omega_0(\mu) = \mu$ og $\omega_{n+1}(\mu) = \omega^{\omega_n(\mu)}$. Et eksempel er $\omega_3(\mu) = \omega^{\omega^{\omega^\mu}}$.

Vi kan nu definere en entydig tildeling af ordinaltal mindre end ε_0 til alle beviser og sekventer i **PA**.

4.4.2 DEFINITION. Ordinaltallet til en sekvent S i beviset $\mathfrak{B}$ skrives som $o(S; \mathfrak{B})$.

1. Initialsekventerne tildeles ordinaltallet 1.

2. Hvis S er en nedre sekvent i en af slutningsreglerne U_v, U_h, K_v, K_h, O_v eller O_h, og ordinaltallet for den øvre sekvent i slutningsreglen er μ, da er $o(S; \mathfrak{B}) = \mu$.

3. Hvis S er nedre sekvent i en af slutningsreglerne $\wedge_v, \vee_h, \Rightarrow_h, \neg_h, \neg_v$ eller i en af de kvantoriske slutningsregler, og ordinaltallet for den øvre sekvent i slutningsreglen er μ, da er $o(S; \mathfrak{B}) = \mu + 1$.

4. Hvis S er den nedre sekvent i en af slutningsreglerne $\wedge_h, \vee_v$ eller $\Rightarrow_v$, og de øvre sekventer har ordinaltallene μ og ν, da er $o(S; \mathfrak{B}) = \mu\#\nu$.

5. Hvis S har højden l og er den nedre sekvent i et snit, og de øvre sekventer har ordinaltallene μ og ν og højden k, da er $o(S; \mathfrak{B}) = \omega_{k-l}(\mu\#\nu)$. (Hvis snittet ikke ændrer på højden af den nederste sekvent i forhold til den øverste sekvent, dvs. hvis snittet er af en lavere grad end de Sn og Ind, der forekommer under S, bliver $k - l = 0$. Derved bliver ordinaltals-tildelingen af S som under 4.)

6. Hvis S med højden l er den nedre sekvent i en Ind, og ordinaltallet for den øvre sekvent er μ, og højden af den øvre sekvent er k, da er $o(S; \mathfrak{B}) = \omega_{k-l+1}(\mu_1 + 1)$. (Husk, at μ er på normalformen, og at μ_1 fremkommer ved $\mu = \omega^{\mu_1} + \cdots + \omega^{\mu_n}$, hvor $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n$.)

Ordinaltallet for et bevis $\mathfrak{B}$, er ordinaltallet for $\mathfrak{B}$'s slutsekvent. Dette skriver vi som $o(\mathfrak{B})$. □

En **sti** i et bevis er en følge af sekventer, der opfylder, at følgen begynder med en initialsekvent og ender med slutsekventen. Det må yderligere gælde om følgen, at enhver sekvent, undtagen slutsekventen, er den øvre sekvent i en slutningsregel, og er umiddelbart efterfulgt af den nedre sekvent i samme slutningsregel.

4.4.3 Lemma. Antag, at beviset $\mathfrak{B}$ indeholder sekventen S_0, samt at der ikke er nogen Ind under S_0 og lad $\mathfrak{B}_0$ være den del af $\mathfrak{B}$, som beviser S_0. Lad $\mathfrak{B}'_0$ være et andet bevis for S_0, hvor $\mathfrak{B}'$ er det bevis, som fremkommer fra $\mathfrak{B}$, hvis $\mathfrak{B}_0$ erstattes med $\mathfrak{B}'_0$. Da gælder det, at hvis $o(S_0; \mathfrak{B}') < o(S_0; \mathfrak{B})$, da er $o(\mathfrak{B}') < o(\mathfrak{B})$.

Bevis. Betragt en sti i $\mathfrak{B}$, som indeholder S_0. Vi viser ved induktion, at for enhver sekvent S, der er S_0 eller under S_0 i stien, vil det gælde, givet $o(S_0; \mathfrak{B}') < o(S_0; \mathfrak{B})$, at $o(S; \mathfrak{B}') < o(S; \mathfrak{B})$, hvor $(S; \mathfrak{B}')$ er sekventen, som svarer til $(S; \mathfrak{B})$ i $\mathfrak{B}'$.

Hvis $S = S_0$ er $o(S; \mathfrak{B}') < o(S; \mathfrak{B})$ ifølge antagelsen.

Antag nu, at sekventen S_n er den sekvent i beviset $\mathfrak{B}$, som står n slutninger under S_0, og at $o(S_n; \mathfrak{B}') < o(S_n; \mathfrak{B})$. Dette er induktionsantagelsen. Uanset hvilken slutningsregel, der bliver benyttet fra $(S_n, \mathfrak{B})$ til $(S_{n+1}, \mathfrak{B})$, vil den samme slutningsregel bringe $(S_n; \mathfrak{B}')$ til $(S_{n+1}; \mathfrak{B}')$. Da $h(S_n; \mathfrak{B}) = h(S_n; \mathfrak{B}')$ og $h(S_{n+1}; \mathfrak{B}) = h(S_{n+1}; \mathfrak{B}')$ vil tildelingen af ordinaltal ifølge definition 4.4.2 punkt 2 og 3 resultere i, at $o(S_{n+1}; \mathfrak{B}') < o(S_{n+1}; \mathfrak{B})$. Hvis tildelingen sker ifølge punkt 4, 5 og 6, ses det, at $o(S_{n+1}; \mathfrak{B}') < o(S_{n+1}; \mathfrak{B})$. Den sidste konklusion følger, da den naturlige sum $\#$ er strengt monoton dvs. hvis $\mu < \nu$ så er $\mu\#\kappa < \nu\#\kappa$. Det følger heraf, at hvis S er slutsekventen i $\mathfrak{B}$, så er $o(S; \mathfrak{B}') < o(S; \mathfrak{B})$, hvilket vil sige, at $o(\mathfrak{B}') < o(\mathfrak{B})$. ∎

4.5 De forberedende skridt

Givet et bevis $\mathfrak{B}_\rightarrow$ af den tomme sekvent, vil vi nu give en algoritme, der giver et omskrevet bevis $\mathfrak{B}'_\rightarrow$ af den tomme sekvent. Denne algoritme kalder vi **de forberedende skridt**. Konkret giver de forberedende skridt ud fra $\mathfrak{B}_\rightarrow$ et nyt bevis $\mathfrak{B}'_\rightarrow$, hvor der i afslutningen af $\mathfrak{B}'_\rightarrow$ findes et såkaldt passende snit. Til et sådant passende snit vil vi derefter definere en reduktion på afslutningen af $\mathfrak{B}'_\rightarrow$, således at ordinaltallet sænkes. Det viser sig, at efter en sådan reduktion kan de forberedende skridt foretages igen, og et nyt passende snit vil fremkomme. Derfor vil ordinaltallet for beviset kunne sænkes vilkårligt mange gange. Dette er i modstrid med at enhver nedadstigende kæde begyndende med et ordinaltal mindre end ε_0 vil terminere, og det vil således være vist, at den tomme sekvent ikke kan bevises i **PA**, hvorfor **PA** er konsistent.

4.5.1 Definition. En **klynge** er en følge af formler, som starter med en initialformel eller en udtynding, og som slutter med en formel i slutsekventen eller er en snitformel (se figur 4.1). □

4.5.2 Definition. **Efterfølgerformlen** til en formel α i klyngen er bestemt på følgende måde:

(a) Er α indeholdt i den øvre sekvent af ,n af slutningsreglerne udtynding, kontraktion eller ombytning, er efterfølgerformlen i den nedre sekvent α.

(b) Hvis α er en snitformel, har α ingen efterfølger.

(c) Hvis α er indeholdt i den øvre sekvent i en af de udsagnslogiske eller kvantoriske slutningsregler, og α er den formel, som bliver omformet ved brug af slutningsreglen, er efterfølgerformlen den nye formel i den nedre sekvent. Hvis α ikke bliver omformet ved brug af slutningsreglen, er efterfølgerformlen den formel α, som forekommer i den nedre sekvent. □

4.5.3 Definition. **Afslutningen** af et bevis $\mathfrak{B}$ er defineret ved følgende:

(a) Slutsekventen ligger i afslutningen.

(b) De øvre sekventer af en slutningsregel ligger i afslutningen, hviss den nedre gør, undtaget herfra er dog de sekventer defineret ved (c) nedenfor.

(c) De øvre sekventer af en udsagnslogisk eller en kvantorisk slutningsregel, hvor den principale formel tilhører en klynge, der slutter med et snit, er ikke indeholdt i afslutningen. En sådan slutning, hvor de øvre sekventer ikke er indeholdt i afslutningen, men hvor den nedre er, kalder vi for en **grænseslutning**. □

I eksemplet i figur 4.1 er afslutningen hele beviset undtagen initialsekventerne.

4.5.4 Definition.

(a) En **logisk formel** er en formel, hvori der forekommer mindst et logisk symbol.

(b) Et snit, hvor snitformlen er en logisk formel, kalder vi et **essentielt snit**.

(c) En initialsekvent af formen $\alpha \to \alpha$ kalder vi en **logisk initialsekvent**. □

Vi er nu nået til selve proceduren de forberedende skridt, der er givet efter følgende 'skridtnummerering':

1. Hvis afslutningen af $\mathfrak{B}_{\to}$ indeholder frie variable, som ikke er egenvariable, erstat da alle disse variable med konstanten 0. Ved dette skridt får vi lukket alle termer i afslutningen.

2. Hvis afslutningen indeholder brug af *Ind*, betragt da den nederste af disse og kald denne *Ind*′. Kald den del af $\mathfrak{B}_{\to}$, som beviser den øvre sekvent af *Ind*′ for $\mathfrak{B}_{\to,0}$, og lad den øvre sekvent S og den nedre sekvent S_0 i *Ind*′ have højderne l og k. Hvis $o(S) = \mu$, er $o(S_0) = \omega_{l-k+1}(\mu_1 + 1)$. Da alle frie variable i afslutningen er blevet elimineret, vil termen

$$\dfrac{\dfrac{\wedge_h\,\dfrac{\Gamma' \to \Theta', \alpha \qquad \Gamma' \to \Theta', \beta}{\Gamma' \to \Theta', \alpha \wedge \beta}}{\Gamma \to \Theta, \alpha \wedge \beta} \qquad \dfrac{\dfrac{\alpha, \Pi' \to \Lambda'}{\alpha \wedge \beta, \Pi' \to \Lambda'}\,\wedge_v}{\alpha \wedge \beta, \Pi \to \Lambda}}{\Gamma, \Pi \to \Theta, \Lambda}$$

Figur 4.1 Eksempel på to klynger i et bevis. De øverste sekventer i beviset betragtes som værende præmisser. Klyngerne er indrammet.

s i S_0 være en lukket term, og det kan vises, at der findes et tal m, således at $\rightarrow s = m$ er beviselig i **PA** uden brug af essentielle snit eller Ind.[6] Af samme årsag vil der findes et bevis for $F(m) \rightarrow F(s)$. Induktionen løber således over et endeligt antal variable, nemlig m. Dette kan gøres ved at benytte delbeviset $\mathfrak{B}_{\rightarrow,0}$. I $\mathfrak{B}_{\rightarrow,0}$ erstattes termen s med henholdsvis $1, 2, \ldots, m$, så der fremkommer m forskellige del-beviser. Beviset $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$ kan bygges op efter formen angivet på figur 4.2.

Da alle slutsekventer på hver af de n del-beviser har den samme grad, vil de sekventer, som er mærket med en stjerne, have den samme højde, da alle snit har sammme grad. Derfor vil disse sekventer også blive tildelt det samme ordinaltal μ. Da beviset for sekventen $F(m) \rightarrow F(s)$ hverken indeholder essentielle snit eller Ind, vil $o(F(m) \rightarrow F(s)) = q < \omega$. Dette følger af definition 4.4.2 punkt 2–4.

[6]Se [Takeuti, 1987; p. 77].

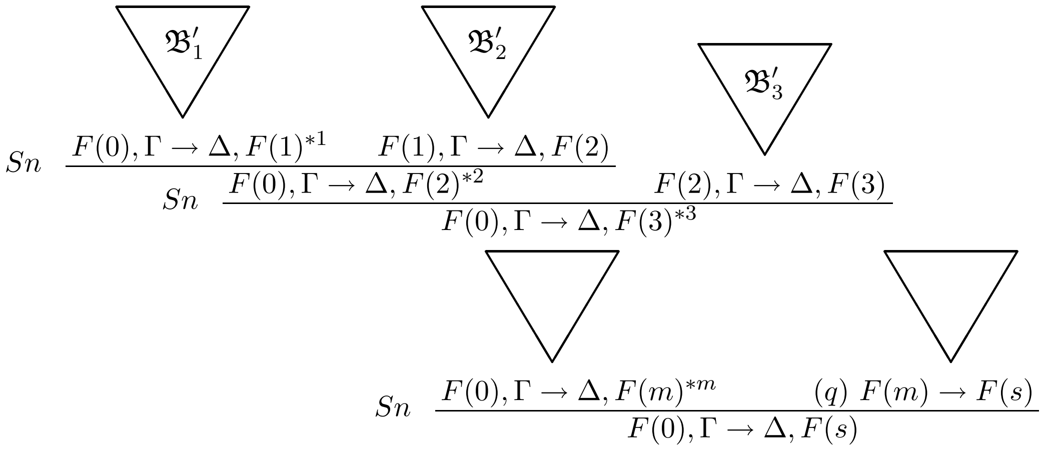
Ordinaltallet til hver af de stjerne-mærkede sekventer vil kunne tildeles på følgende vis: $o(S^{*_2}) = \mu\#\mu, o(S^{*_3}) = \mu\#\mu\#\mu, \ldots o(S^{*_m}) = \omega_{l-k}(\mu * m + q)$, hvor $\mu * m + q < \omega^{\mu_1+1}$, da $q < \omega$. Derfor vil

$$o(S_0; \mathfrak{B}'_\rightarrow) = \omega_{l-k}(\mu * m + q) < \omega_{l-k+1}(\mu_1 + 1) = o(S_0; \mathfrak{B}_\rightarrow).$$

Da $o(S_0; \mathfrak{B}'_\rightarrow) < o(S_0; \mathfrak{B}_\rightarrow)$, vil $o(\mathfrak{B}'_\rightarrow) < o(\mathfrak{B}_\rightarrow)$ ifølge lemma 4.4.3.

Hvis der findes Ind i afslutningen af $\mathfrak{B}_\rightarrow$, giver skridt 2 et 'reduceret' bevis $\mathfrak{B}'_\rightarrow$ for $\mathfrak{B}_\rightarrow$, hvorom det gælder, at $o(\mathfrak{B}'_\rightarrow) < o(\mathfrak{B}_\rightarrow)$. Vi har således reduceret $\mathfrak{B}_\rightarrow$ til et bevis $\mathfrak{B}'_\rightarrow$ med et mindre ordinaltal, og vi er færdige.

Antag derfor, at der ikke findes en Ind i afslutningen af $\mathfrak{B}_\rightarrow$, hvorfor der fortsættes til skridt 3.

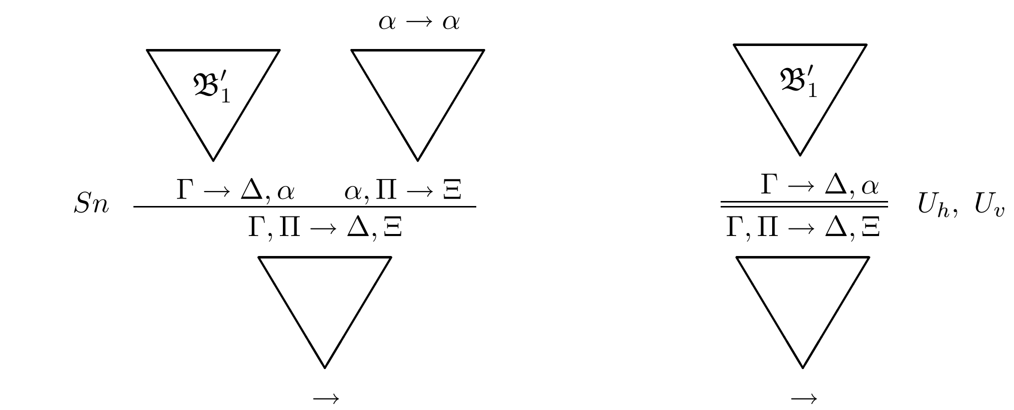


Figur 4.2 Elimination af induktion i afslutningen.

3. Hvis afslutningen af $\mathfrak{B}_\rightarrow$ indeholder en logisk initialsekvent $\alpha \rightarrow \alpha$, må efterfølgere til α'erne i de to tilhørende klynger blive fjernet fra beviset ved brug af snitregler, da slutsekventen er tom. Da der hverken forekommer Ind, udsagnslogiske eller kvantoriske slutningsregler i afslutningen af $\mathfrak{B}_\rightarrow$, vil enhver efterfølgerformel i klyngen v're af samme form som formlen i initialsekventen. Antag, at det er en efterfølgerformel α i antecedent-klyngen, der bliver 'snittet' v'k først. I stedet for at lade α blive introduceret i afslutningen, for derefter at blive fjernet, kan snittet udelukkes, og det α, som er tilbage som en efterfølger til succedenten, kan indføres ved en U_h. Se figur 4.3.

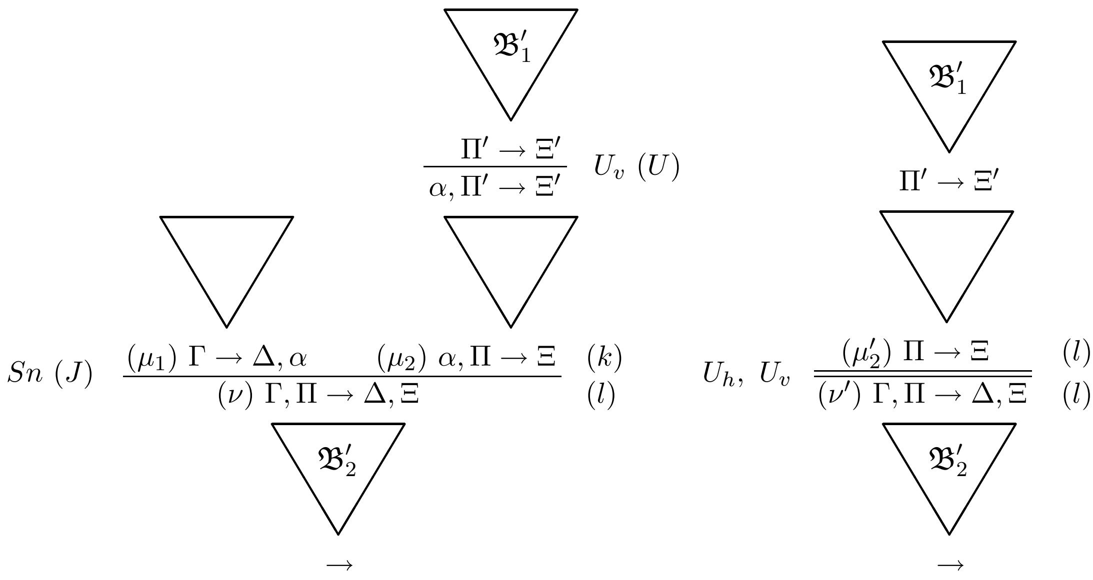
   Da der stadigvæk vil være en formel α på succedent-siden, som skal 'snittes', vil højden af den nedre sekvent i det første snit i $\mathfrak{B}_\rightarrow$ og den tilsvarende sekvent i $\mathfrak{B}'_\rightarrow$ være den samme. Da følger det af lemma 4.4.3, at $o(\mathfrak{B}'_\rightarrow) < o(\mathfrak{B}_\rightarrow)$.

   Hvis det er en efterfølgerformel i succedent-klyngen, der bliver 'snittet' væk først, følger argumentet ved symmetri-overvejelser. Hvis der er en logisk initialsekvent i afslutningen, findes der altså et reduceret bevis $\mathfrak{B}'_\rightarrow$ for $\mathfrak{B}_\rightarrow$. Antag derfor, at der ikke findes Ind eller logiske initialsekventer i afslutningen og fortsæt til skridt 4.



Figur 4.3 Reduktion med en logisk initialsekvent i afslutningen.

4. Hvis der findes en udtynding i afslutningen, betragt da den nederste udtynding U i afslutningen, og kald den formel som bliver tilført for α. Da slutsekventen er tom, må der være et snit J, hvor snitformlen er en efterfølgerformel til α. Antag, at der ikke bliver benyttet kontraktioner på α mellem udtyndingen U og snittet J. Da kan $\mathfrak{B}_{\to}$ reduceres til $\mathfrak{B}_{\to}'$. Se figur 4.4.

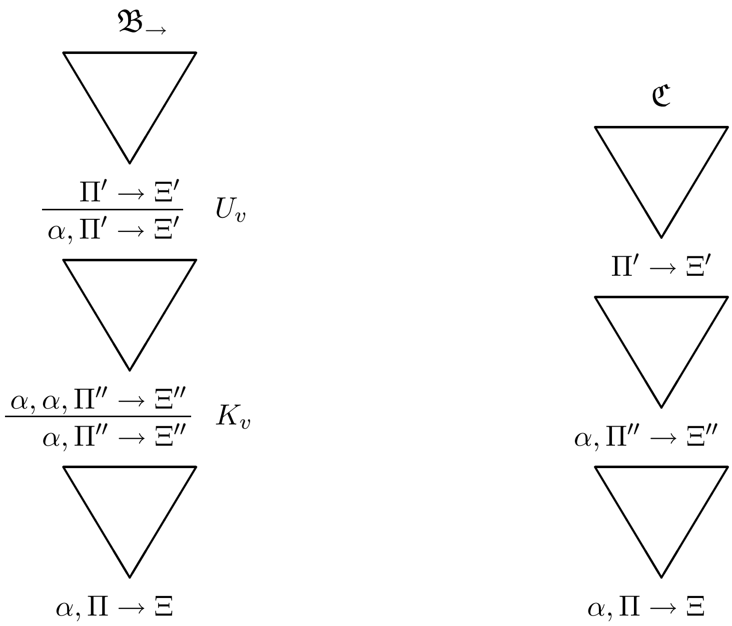


Figur 4.4 Reduktion på en udtynding i afslutningen.

Lad $h(\Gamma, \Pi \to \Delta, \Xi; \mathfrak{B}_{\to}) = l$ og $h(\alpha, \Pi \to \Xi; \mathfrak{B}_{\to}) = k$. Det må gælde, at $l \leq k$ og $h(\Pi \to \Xi; \mathfrak{B}_{\to}') = h(\Gamma, \Pi \to \Delta, \Xi; \mathfrak{B}_{\to}') = l$, da $h(\Gamma, \Pi \to \Delta, \Xi; \mathfrak{B}_{\to}') = h(\Gamma, \Pi \to \Delta, \Xi; \mathfrak{B}_{\to})$. Lad S være en sekvent i $\mathfrak{B}_{\to}$ over $\alpha, \Pi \to \Xi$, og lad S' være den tilsvarende sekvent i $\mathfrak{B}_{\to}'$. Da del-beviset fra $\alpha, \Pi' \to \Xi'$ til $\alpha, \Pi \to \Xi$ svarer til del-beviset fra $\Pi' \to \Xi'$ til $\Pi \to \Xi$ kan det ses, at

$$\omega_{k_1 - k_2}(o(S; \mathfrak{B}_{\to})) \geq o(S'; \mathfrak{B}_{\to}'), \text{ hvor } k_1 = h(S; \mathfrak{B}_{\to}) \text{ og } k_2 = h(S'; \mathfrak{B}_{\to}'). \tag{4.4}$$

Sekventerne tildeles ordinaltal: $o(\Gamma \to \Delta, \alpha; \mathfrak{B}_{\to}) = \mu_1$, $o(\alpha, \Pi \to \Xi; \mathfrak{B}_{\to}) = \mu_2$, $o(\Gamma, \Pi \to \Delta, \Xi; \mathfrak{B}_{\to}) = \nu$, $o(\Pi \to \Xi; \mathfrak{B}'_{\to}) = \mu'_2$ og $o(\Gamma, \Pi \to \Delta, \Xi; \mathfrak{B}'_{\to}) = \nu'$. Det ses, at $\mu'_2 = \nu'$, idet slutningsreglerne U_v og U_h ikke ændrer sekventens ordinaltal. Ud fra formel 4.4 fås $\omega_{k-l}(\mu_2) \geq \mu'_2$. Herefter fås $\nu = \omega_{k-l}(\mu_2 \# \mu_1) > \omega_{k-l}(\mu_2) \geq \mu'_2 = \nu'$. Altså vil $o(\mathfrak{B}'_{\to}) < o(\mathfrak{B}_{\to})$. Antag nu, at der bliver benyttet kontraktioner på α mellem U og J. Da kan $\mathfrak{B}_{\to}$ reduceres til $\mathfrak{C}$. Se figur 4.5.



Figur 4.5 Reduktion på en udtynding i afslutningen.

Da brug af udtynding og kontraktion ikke ændrer på ordinaltallet, vil $o(\mathfrak{B}_{\to}) = o(\mathfrak{C})$. Derfor kan der foretages en reduktion på $\mathfrak{C}$, som således ikke vil indeholde kontraktioner, og sluttelig kan vi antage, at der ikke er nogen udtynding i afslutningen af beviset.

4.6 Det passende snit

Vi viser nu, at afslutningen på $\mathfrak{B}'_{\to}$ indeholder et passende snit. Dette snit er af vital betydning for den senere essentielle reduktion.

4.6.1 Sætning. Der findes ikke et bevis af den tomme sekvent, som kun indeholder matematiske initialsekventer, udtyndinger, kontraktioner, ombytninger og ikke-essentielle snit, og hvor der ikke forekommer frie variable.

Bevis. Hvis beviset ikke indeholder frie variable, vil det kunne afgøres, om formler som $s = t$ er sande eller falske. Enhver matematisk initialsekvent vil således være sand, og da alle slutningsregler er sandhedsbevarende, jvf. sundhed, vil enhver sekvent i beviset være sand. Da den tomme sekvent er falsk, vil den ikke kunne bevises i **PA**. ∎

Beviset for sætning 4.6.1 er det eneste bevis, hvor vi benytter os af semantiske overvejelser, og disse semantiske overvejelser begrænser sig til definitionen af, hvornår en matematisk initialsekvent er sand. Altså bliver den ikke-konstruktive del af TS undgået.

Efter de fire forberedende skridt opfylder afslutningen af $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$ betingelserne for sætning 4.6.1. Da følger det af sætning 4.6.1, at

4.6.2 Korollar. Afslutningen af $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$ kan ikke være hele $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$.

En antagelse om, at afslutningen af $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$ er hele beviset, fører med det samme til en modstrid.

4.6.3 Definition. Et **passende snit** er et snit i afslutningen af et bevis, hvor det om snittet gælder, at

(a) Snitformlen er en logisk formel.

(b) Snitformlerne er i samme klynge som principalformlen i en grænseslutning. □

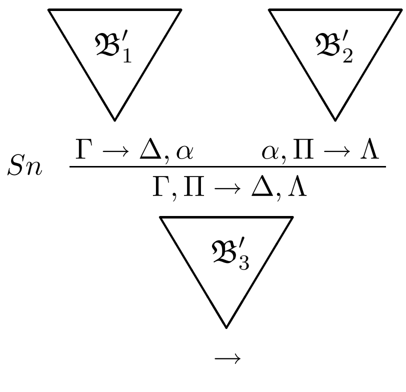
Det følger af definitionen, at et passende snit er et essentielt snit, der afslutter to klynger, begge indeholdende en principalformel fra en grænseslutning.

Efter de forberedende skridt opfylder afslutningen af $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$ følgende tre egenskaber:

1. Afslutningen er ikke hele beviset selv (korollar 4.6.2).
2. Afslutningen indeholder ingen udsagnslogiske slutninger, kvantoriske slutninger, *Ind* eller *U* (de forberedende skridt).
3. Hvis afslutningen indeholder initialsekventer, er disse ikke logiske initialsekventer (sætning 4.6.1).

Ifølge 1 vil der være grænseslutninger for afslutningen af $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$. For en grænseslutning gælder det, at klyngen, som indeholder principalformlen i grænseslutningen, ender med en snitformel. Eksistensen af grænseslutninger sikrer pr. definition essentielle snit længere nede i beviset, hvorfor afslutningen af $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$ mindst indeholder ,t essentielt snit. Dette vil gælde for enhver afslutning af ethvert bevis $\mathfrak{B}$, så længe afslutningen af $\mathfrak{B}$ ikke er $\mathfrak{B}$ selv.

Kald det nederste essentielle snit i $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$ for *Sn*. Vi viser nu, at hvis *Sn* ikke er et passende snit, så vil der findes et essentielt snit over *Sn*, kaldet *Sn*$'$, der er det nederste snit i afslutningen af et delbevis af $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$, der overholder 1, 2, og 3. Delbeviset er derfor ikke nødvendigvis et bevis af den tomme sekvent.



Figur 4.6 Hele beviset af den tomme sekvent.

$\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$ vil have formen angivet på figur 4.6, hvor der i $\mathfrak{B}'_3$ ikke forekommer essentielle snit. Antag, at *Sn* ikke er et passende snit. Da vil mindst ,n af snitformlerne α ikke tilhøre samme klynge som en principalformel i en grænseslutning (jvf. definition 4.6.3 af et passende snit). Antag, at det er α i sekventen $\Gamma \to \Delta, \alpha$, der gør, at Sn ikke er passende. I tilfældet, hvor det er α i sekventen $\alpha, \Pi \to \Gamma$, der gør, at Sn ikke er passende, er beviset analogt, hvorfor kun det første tilfælde gennemgås. For at vise, at afslutningen af $\mathfrak{B}'_{\to}$ indeholder et passende snit, viser vi nu følgende tre lemmaer:

4.6.4 LEMMA. $\mathfrak{B}'_1$ indeholder en grænseslutning fra $\mathfrak{B}'_{\to}$.

BEVIS. Antag, at $\mathfrak{B}'_1$ ikke indeholder en grænseslutning fra $\mathfrak{B}'_{\to}$. Da kan den logiske formel α i $\Gamma \to \Delta, \alpha$ kun stamme fra en initialsekvent i $\mathfrak{B}'_{\to}$ ifølge 2. Men 3 fastslår, at logiske initialsekventer ikke forekommer i afslutningen af $\mathfrak{B}'_{\to}$, hvorved en modstrid opnås. ∎

4.6.5 LEMMA. Hvis en slutning i $\mathfrak{B}'_1$ er grænseslutning i $\mathfrak{B}'_{\to}$, er slutningen også grænseslutning i $\mathfrak{B}'_1$.

BEVIS. Ifølge antagelsen findes ingen essentielle snit under Sn, og α i $\Gamma \to \Delta, \alpha$ er ikke en del af en klynge indeholdende en principalformel. Der er derfor ingen slutningsregler i afslutningen af $\mathfrak{B}'_{\to}$, hvor en klynge for en principalformel i $\mathfrak{B}'_1$ kan ende i en snitformel. Således vil en principalformel fra en slutning i $\mathfrak{B}'_1$, der er en grænseslutning i $\mathfrak{B}'_{\to}$, ikke være indeholdt i $\mathfrak{B}'_1$'s slutsekvent, hvor slutningen også må være en grænseslutning for $\mathfrak{B}'_1$ selv. ∎

4.6.6 LEMMA. Afslutningen af $\mathfrak{B}'_1$ er ikke $\mathfrak{B}'_1$ selv, og afslutningen af $\mathfrak{B}'_1$ er den del af afslutningen af $\mathfrak{B}'_{\to}$, der ligger i $\mathfrak{B}'_1$.

BEVIS. De to foregående lemmaer sikrer, at der eksisterer mindst ‚n grænseslutning i $\mathfrak{B}'_1$. Af definitionen på grænseslutning følger det, at afslutningen af $\mathfrak{B}'_1$ ikke er $\mathfrak{B}'_1$ selv, da øvre sekventer i en grænseslutning ikke er indeholdt i afslutningen.

Grænseslutninger i $\mathfrak{B}'_1$ er også grænseslutninger i $\mathfrak{B}'_{\to}$, hvorfor afslutningen af $\mathfrak{B}'_1$ må være den del af afslutningen af $\mathfrak{B}'_{\to}$, der ligger i $\mathfrak{B}'_1$. ∎

4.6.7 SÆTNING. Afslutningen af $\mathfrak{B}'_{\to}$ indeholder et passende snit.

BEVIS. Afslutningen af $\mathfrak{B}'_1$ er ifølge lemma 4.6.6 ikke $\mathfrak{B}'_1$ selv. Afslutningen af $\mathfrak{B}'_1$ ligger ifølge samme lemma i afslutningen af $\mathfrak{B}'_{\to}$, hvorfor afslutningen af $\mathfrak{B}'_1$ også må opfylde 1,2 og 3. Afslutningen af $\mathfrak{B}'_1$ vil derfor pr. definition indeholde et essentielt snit. $\mathfrak{B}'_1$ deles op i tre delbeviser omkring det nederste essentielle snit. En antagelse om at snittet ikke er passende, leder igen frem til, at der vil findes et bevis af ‚n af snittets øvre sekventer, hvis afslutning overholder 1,2 og 3. Dette skyldes, at lemma 4.6.4 til 4.6.6 kan vises helt uafhængigt af, hvilken slutsekvent $\mathfrak{B}'_1$ har. Når proceduren gentages, vil de nye afslutninger altid holdes inden for afslutningen af det oprindelige bevis $\mathfrak{B}'_{\to}$, hvorfor nye afslutninger vil overholde 1,2 og 3. Derfor vil en antagelse om, at der ikke findes et passende snit i afslutningen af $\mathfrak{B}'_{\to}$ betyde, at proceduren aldrig standser, da der altid vil kunne findes et essentielt snit mere.

Ethvert bevis, således også $\mathfrak{B}'_{\to}$, består af et endeligt antal slutninger, hvorfor afslutningen af et bevis tilsvarende er endelig. En antagelse om, at der ikke findes et passende snit i afslutningen af $\mathfrak{B}'_{\to}$, fører derfor til en modstrid. ∎

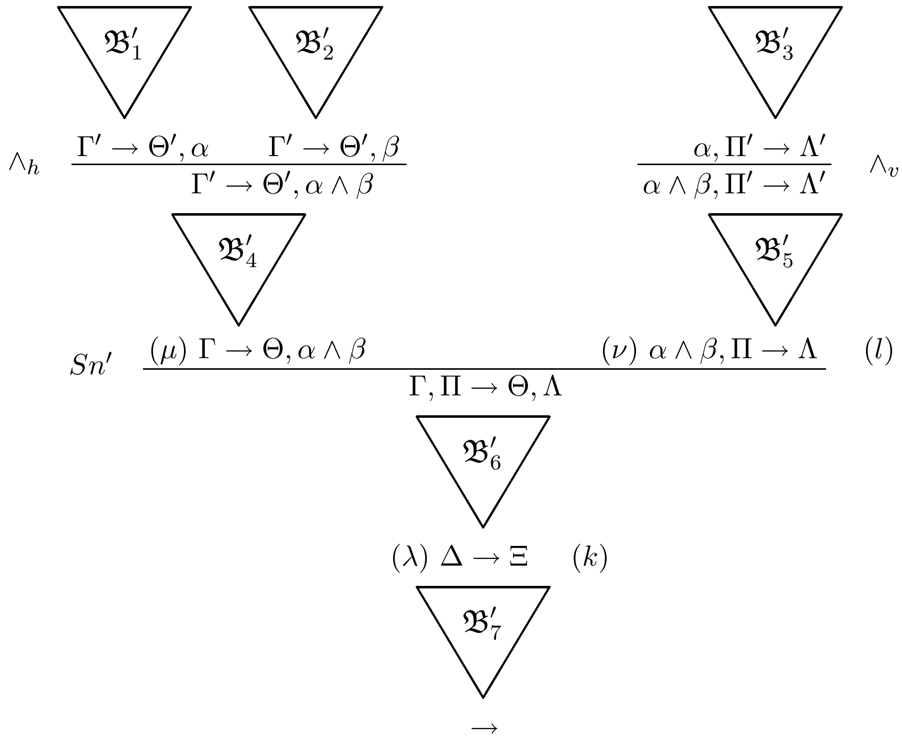
4.7 Den essentielle reduktion

Da det er fastslået, at afslutningen af $\mathfrak{B}'_{\to}$ indeholder et passende snit, kan den **essentielle reduktion** defineres og foretages. Betragt det nederste passende snit i $\mathfrak{B}'_{\to}$'s afslutning. Snitformlen i dette snit er pr. definition en logisk formel. Vi skelner mellem forskellige logiske formler med forskellige tilhørende slutningsregler. Det er det 'yderste' logiske symbol, der 'bestemmer' formlen. Er den logiske formel eksempelvis $\alpha \wedge \beta$, er det $\wedge$, der 'bestemmer' formlen, selv om α og β kan indeholde andre logiske symboler.

Der skelnes mellem to tilfælde:

- De logiske symboler, hvis venstre eller højre slutningsregel har to øvre sekventer. Dette er symbolerne $\wedge, \vee$ og $\Rightarrow$.
- Logiske symboler, hvis venstre og højre slutningsregel hver kun har ‚n øvre sekvent, hvilket er symbolerne $\neg, \forall$ og $\exists$.

Det er ikke det logiske symbols betydning, men derimod den syntaktiske form af slutningsreglen for symbolet, der afgør, hvorledes reduktionen skal udføres, hvilket er i overensstemmelse med bevisets bevisteoretiske form.



Figur 4.7 Generel form af et bevis af den tomme sekvent $\mathfrak{B}'_{\to}$.

Lad det logiske symbol være $\wedge$, så snitformlen har formen $\alpha \wedge \beta$. Beviset for den tomme sekvent ses i figur 4.7, hvor de øvre sekventer i Sn' har højden l, mens $\Delta \to \Xi$ er den øverste sekvent med en højde mindre end l. Denne kaldes k, og dermed er $k < l$. Bemærk, at eksempelvis Γ og Γ' ikke er identiske.

Fra $\mathfrak{B}'_{\to}$ er der brug for tre ordinaltal.

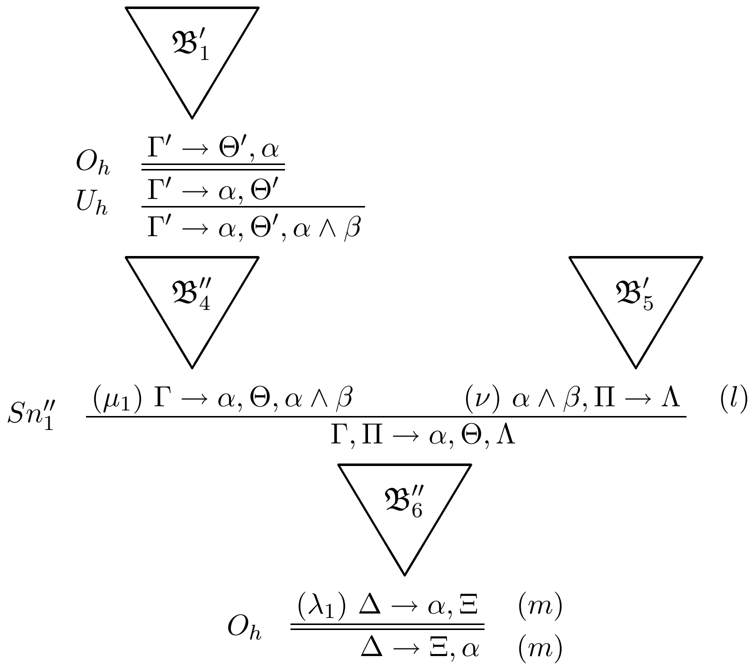
μ er $o(\Gamma \to \Theta, \alpha \wedge \beta)$.

ν er $o(\alpha \wedge \beta, \Pi \to \Lambda)$.

λ er $o(\Delta \to \Xi)$.

Højden af en sekvent kan kun ændres ved *Sn* eller *Ind*. Afslutningen af $\mathfrak{B}'_{\to}$ indeholder efter de forberedende skridt ingen *Ind*, hvorfor $\Delta \to \Xi$, der er øverste formel med højde k, er den nedre sekvent i et snit.

Den essentielle reduktion er en omskrivning af $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$ til et nyt bevis for den tomme sekvent $\mathfrak{B}''_{\rightarrow}$, hvis ordinaltal er mindre end ordinaltallet for $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$. Da $\mathfrak{B}''_{\rightarrow}$ er omfattende, deles beviset op i tre dele. Først beskrives de to øverste dele af $\mathfrak{B}''_{\rightarrow}$, der munder ud i sekventerne $\Delta \rightarrow \Xi, \alpha$ og $\alpha, \Delta \rightarrow \Xi$. Tredie og nederste del af $\mathfrak{B}''_{\rightarrow}$ laver et snit med slutsekventerne fra de to første dele som øvre sekventer og med α som snitformel. Første del kaldes $\mathfrak{B}''_{\rightarrow,1}$ og har form som i figur 4.8.



Figur 4.8 Første delbevis $\mathfrak{B}''_{\rightarrow,1}$.

Delbevis af $\mathfrak{B}''_{\rightarrow}$, kaldet $\mathfrak{B}''_{\rightarrow,1}$, der beviser $\Delta \rightarrow \Xi, \alpha$

Bemærk, at $\mathfrak{B}''_{\rightarrow,1}$ har $\mathfrak{B}'_1$ og $\mathfrak{B}'_5$ tilfælles med $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$, hvorfor $\mathfrak{B}''_{\rightarrow,1}$ har de samme initialsekventer som $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$. De øvre sekventer i Sn''_1 har højden l i det samlede bevis $\mathfrak{B}''_{\rightarrow}$. At højden for disse sekventer derfor er den samme i $\mathfrak{B}''_{\rightarrow}$ som i $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$, kan først forklares, når $\mathfrak{B}''_{\rightarrow}$ er færdigkonstrueret. Både $\Delta \rightarrow \alpha, \Xi$ og $\Delta \rightarrow \Xi, \alpha$ har højden m, da der kun findes slutningsregler, der ikke ændrer ordinaltallet mellem dem. Grunden til, at to delbeviser af $\mathfrak{B}''_{\rightarrow,1}$ betegnes $\mathfrak{B}''_4$ og $\mathfrak{B}''_6$ er, at beviserne svarer til $\mathfrak{B}'_4$ og $\mathfrak{B}'_6$ i $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$ med en klynge af α'er i succedenterne.

Ligesom for $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$ er der brug for navngivning af nogle sekventers ordinaltal. Ordinaltal i $\mathfrak{B}''_{\rightarrow,1}$ betegnes med subscript '1'.

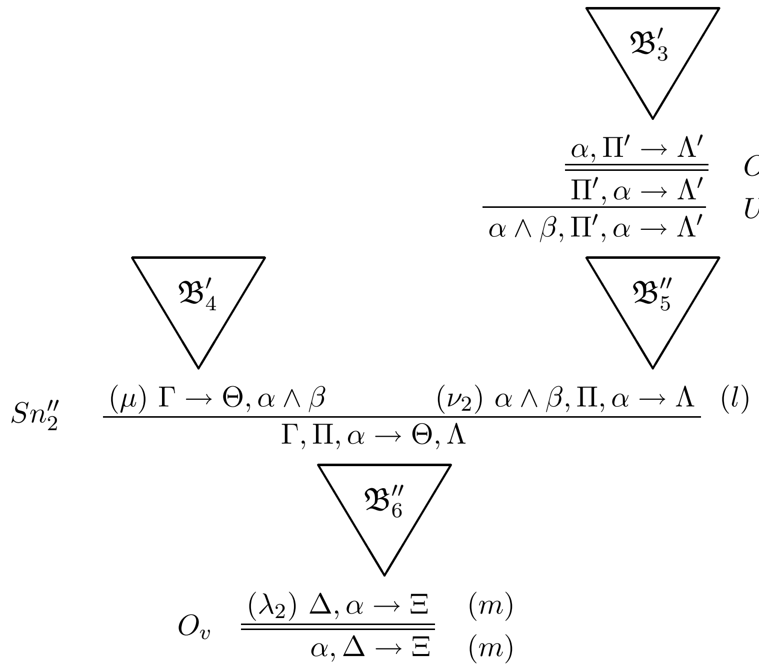
μ_1 er $o(\Gamma \rightarrow \alpha, \Theta, \alpha \wedge \beta)$.

ν betegner $o(\alpha \wedge \beta, \Pi \rightarrow \Lambda)$, der udledes præcis som i $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$, hvorfor ordinaltallet er det samme.

λ_1 er $o(\Delta \rightarrow \alpha, \Xi)$.

Delbevis af $\mathfrak{B}''_{\rightarrow}$, kaldet $\mathfrak{B}''_{\rightarrow,2}$, der beviser $\alpha, \Delta \rightarrow \Xi$

Den anden del af $\mathfrak{B}''_{\rightarrow}$ kaldes $\mathfrak{B}''_{\rightarrow,2}$, og defineres ved figur 4.9.



Figur 4.9 Andet delbevis $\mathfrak{B}''_{\to,2}$.

Der bruges i $\mathfrak{B}''_{\to,2}$ ligesom i $\mathfrak{B}''_{\to,1}$ kun initialsekventer, der også bruges i $\mathfrak{B}'_{\to}$. $\mathfrak{B}''_5$ og $\mathfrak{B}''_6$ svarer til $\mathfrak{B}'_5$ og $\mathfrak{B}'_6$ i $\mathfrak{B}'_{\to}$ blot med α'er i alle antecedenterne. De øvre sekventer i snittet Sn''_2 har højden l, og de nedre startende med $\alpha, \Delta \to \Xi$ har højden m. Ordinaltal for sekventer i $\mathfrak{B}''_{\to,2}$ betegnes med subscript '2'. Følgende ordinaltal vil senere blive brugt.

μ er $o(\Gamma \to \Theta, \alpha \wedge \beta)$, udledes præcis som i $\mathfrak{B}'_{\to}$.

ν_2 $o(\alpha \wedge \beta, \Pi, \alpha \to \Lambda)$.

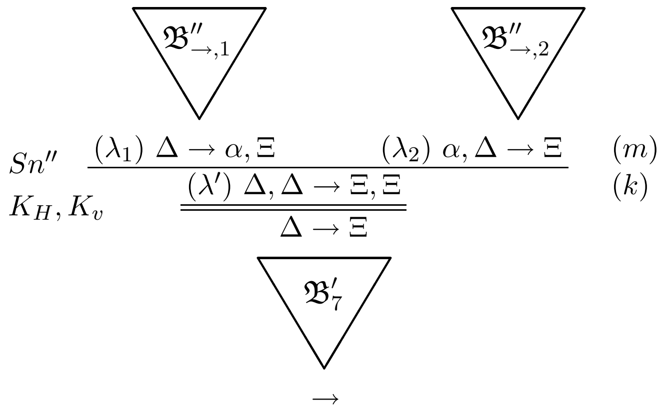
λ_2 er $o(\Delta, \alpha \to \Xi)$.

Det samlede reducerede bevis for den tomme sekvent

Samlet bliver $\mathfrak{B}''_{\to}$ som det ses i figur 4.10. Fra $\delta \to \Xi$ til slutsekventen er $\mathfrak{B}''_{\to}$ identisk med $\mathfrak{B}'_{\to}$. Sekventen $\Delta, \Delta, \to \Xi, \Xi$ har samme højde som $\Delta \to \Xi$, da der kun kan være udtynding, kontraktion eller ombytning mellem dem. Højden af $\Delta \to \Xi$ er ifølge $\mathfrak{B}'_{\to}$ lig med k. De to øvre sekventer i Sn'' har højden m, hvilket forklarer samme betegnelse for de nedre sekventer i $\mathfrak{B}''_{\to,1}$ og $\mathfrak{B}''_{\to,2}$.

De anvendte slutningsregler i $\mathfrak{B}''_6$ i hhv. $\mathfrak{B}''_{\to,1}$ og $\mathfrak{B}''_{\to,2}$ er ens, da den eneste forskel er formlen α, der uforstyrret går igen i antecedenten i $\mathfrak{B}''_{\to,2}$ og i succedenten i $\mathfrak{B}''_{\to,1}$. Derfor må højden af de øvre sekventer i snittene Sn''_1 og Sn''_2 være den samme. Det kan ved en lignende argumentation ses, at slutningerne i delbeviset $\mathfrak{B}'_6$ af $\mathfrak{B}'_{\to}$ er identiske med $\mathfrak{B}''_6$.

Den eneste slutning, hvor højden af de øvre sekventer for Sn''_1 og Sn''_2 kan gøres forskellige fra højden af de øvre i Sn', er derfor i snittet Sn''. Formlen α har en mindre grad end formlen $\alpha \wedge \beta$, hvorfor graden af Sn'' vil være mindre end graden af Sn', Sn''_1 og Sn''_2, der alle har samme snitformel. Da Sn'' ikke kan ændre ved højden af de øvre sekventer i Sn''_1 og Sn''_2, og da graden af Sn', Sn''_1 og Sn''_2 er ens, vil højden af de øvre sekventer i Sn', Sn''_1 og Sn''_2 være den samme.



Figur 4.10 Reduceret bevis $\mathfrak{B}''_{\rightarrow}$ for den tomme sekvent.

Det er hermed forklaret, hvorfor de pågældende sekventer i definitionen af $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$ og $\mathfrak{B}''_{\rightarrow}$ alle har højden l.

Højden m er defineret som den højeste grad af et snit under de øvre sekventer i Sn''. Hvis graden af α og dermed graden af Sn'' er mindre end k, vil $m = k$, da Sn'' ikke kan ændre højden m. I tilfældet, hvor k er mindre end graden af α, vil m være lig graden af α, idet Sn'' vil være snittet med størst grad under de øvre sekventer for Sn''. Det kan sammenfattes, at k er mindre end eller lig med m.

Graden af α er mindre end graden af $\alpha \wedge \beta$, hvorfor det om højderne k, l og m må gælde, at $k \leq m < l$.

Ud over $\mu, \nu, \lambda, \mu_1, \lambda_1, \nu_2$ og λ_2 defineres i $\mathfrak{B}''_{\rightarrow}$ ordinaltallet λ', der er $o(\Delta, \Delta \rightarrow \Xi, \Xi)$.

4.7.1 Ordinaltallet for $\mathfrak{B}''_{\rightarrow}$

Det vises nu, at ordinaltallet for beviset $\mathfrak{B}''_{\rightarrow}$ er mindre end for $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$. Ifølge lemma 4.4.3 er det tilstrækkeligt at vise $\lambda' < \lambda$, da de to beviser er identiske efter $\Delta \rightarrow \Xi$. Resten af konsistensbeviset er derfor en sammenligning af ordinaltallene for de to beviser. Hvis der til en sekvent S i $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$ er en sekvent S', der optræder på det tilsvarende sted i $\mathfrak{B}''_{\rightarrow}$, men har en vilkårlig formel α i enten antecedent eller succedent, og herudover er identisk med S, kaldes S' en **tilsvarende sekvent**. Alle sekventer i delbeviserne $\mathfrak{B}'_4$, $\mathfrak{B}'_5$ og $\mathfrak{B}'_6$ har tilsvarende sekventer i $\mathfrak{B}''_{\rightarrow}$; sekventerne i $\mathfrak{B}'_6$ har tilmed to hver.

Det er klart, at $\mu_1 < \mu$, da $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$ indeholder en udsagnslogisk slutningsregel $\wedge_h$ mere over sekventen $\Gamma \rightarrow \Theta, \alpha \wedge \beta$ end $\mathfrak{B}''_{\rightarrow}$ over den tilsvarende sekvent $\Gamma \rightarrow \alpha, \Theta, \alpha \wedge \beta$. Ifølge samme argument er $\nu_2 < \nu$.

Lad nu være givet en slutning J mellem Sn' og $\Delta \rightarrow \Xi$ i $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$. Formelt skrevet op som

$$\frac{Q_1 \; Q_2}{Q}$$

Slutningen i $\mathfrak{B}''_{\rightarrow}$ mellem Sn''_1 og $\Delta \rightarrow \alpha, \Xi$ bestående af de tilsvarende sekventer betegnes J', så

$$\frac{Q'_1 \; Q'_2 \quad (k_2)}{Q' \quad (k_1)}$$

hvor højden af den nedre sekvent er k_1 og for de øvre er k_2. Sekventerne Q_1, Q_2 og Q i J har ordinaltallene δ_1, δ_2 og δ. Tilsvarende har Q'_1, Q'_2 og Q' i J' ordinaltallene δ'_1, δ'_2 og δ'.

Sekventen $\Delta \rightarrow \Xi$ i $\mathfrak{B}'_{\rightarrow}$ er den første sekvent med højde forskellig fra l. Derfor er $\Delta \rightarrow \Xi$ nedre sekvent i det eneste snit mellem Sn' og $\Delta \rightarrow \Xi$, hvor højden falder. Heraf følger, at:

$$\delta \;=\; \begin{cases} \delta_1 \# \delta_2 & \text{, hvis } Q \text{ ikke er } \Delta \rightarrow \Xi \\ \omega_{l-k}(\delta_1 \# \delta_2) & \text{, hvis } Q \text{ er } \Delta \rightarrow \Xi \end{cases}$$

Vi betragter i det følgende $\mathfrak{B}''_{\rightarrow,1}$. For sekventer mellem Sn''_1 og $\Delta \rightarrow \alpha, \Xi$ kan et generelt udtryk for ordinaltallet af Q' skrives som:

$$\delta' = \omega_{k_1-k_2}(\delta'_1 \# \delta'_2),$$

der gælder, uanset hvor Q' ligger.

Hvis Q' ikke er $\Delta \rightarrow \alpha, \Xi$ vil ordinaltallet for Q være $\delta = \delta_1 \# \delta_2$, og for Q' være $\delta' = \omega_{k_1-k_2}(\delta'_1 \# \delta'_2)$. Værdierne for δ og δ' sammenlignes ned gennem beviserne i figur 4.11. Først betragtes ordinaltallet for den øverste sekvent mellem Sn' og $\Delta \rightarrow \Xi$ og tallet for dens tilsvarende sekvent. Da begge sekventer er nedre sekventer i snitregler, bliver $\delta = \mu \# \nu$ og $\delta' = \mu_1 \# \nu$ for den tilsvarende sekvent. Det vides, at $\mu_1 < \mu$, hvorfor $\delta' < \delta$.

Det er hermed vist, at $o(\Gamma, \Pi \rightarrow \alpha, \Theta, \Lambda) < o(\Gamma, \Pi \rightarrow \Theta, \Lambda)$. Alle efterfølgende slutninger, inden slutningerne med hhv. $\Delta \rightarrow \alpha, \Xi$ og $\Delta \rightarrow \Xi$ som nedre sekventer, er ens i de to beviser, hvorfor det ved et simpelt induktionsargument ses, at $\delta' < \delta$ gælder helt ned til før hhv. $\Delta \rightarrow \alpha, \Xi$ og $\Delta \rightarrow \Xi$.

$$Sn' \frac{(\mu)\ \Gamma \to \Theta, \alpha \wedge \beta \qquad (\nu)\ \alpha \wedge \beta, \Pi \to \Lambda}{\Gamma, \Pi \to \Theta, \Lambda}\ (l) \qquad Sn''_1 \frac{(\mu_1)\ \Gamma \to \alpha, \Theta, \alpha \wedge \beta \qquad (\nu)\ \alpha \wedge \beta, \Pi \to \Lambda}{\Gamma, \Pi \to \alpha, \Theta, \Lambda}\ (l)$$

$$\mathfrak{B}'_6 \qquad\qquad\qquad\qquad \mathfrak{B}''_6$$

$$(\lambda)\ \Delta \to \Xi \quad (k) \qquad\qquad\qquad (\lambda_1)\ \Delta \to \alpha, \Xi \quad (m)$$

Figur 4.11 De to delbeviser fra hhv. $\mathfrak{B}'_{\to}$ og $\mathfrak{B}''_{\to,1}$.

Alle sekventer mellem Sn''_1 og sekventerne lige før $\Delta \to \alpha, \Xi$ har højden l, da formlen $\Delta \to \alpha, \Xi$ svarer til $\Delta \to \Xi$ i $\mathfrak{B}'_{\to}$, der er den første sekvent med højde forskellig fra l. Det vides dog ikke med sikkerhed, om $\Delta \to \alpha, \Xi$ og $\Delta \to \Xi$ har samme højde. Ordinaltallet for sekventer over $\Delta \to \alpha, \Xi$ kan skrives som:

$$\begin{array}{rll} \delta' & = \omega_{l-k_2}(\delta'_1 \# \delta'_2) & \\ & < \omega_{l-k_2}(\delta_1 \# \delta_2) & \text{, ved induktionsresultatet} \\ & = \omega_{l-k_2}(\delta) & \text{, idet } \delta_1 \# \delta_2 = \delta \text{ når } Q' \text{ ikke er } \Delta \to \alpha, \Xi. \end{array}$$

λ betegner $o(\Delta \to \Xi)$. Det må gælde, at $\lambda = \omega_{l-k}(\kappa)$, hvor κ er den naturlige sum af ordinaltallene for de to øvre sekventer i snittet lige over $\Delta \to \Xi$.

Sekventen $\Delta \to \alpha, \Xi$ har højden m og $o(\Delta \to \alpha, \Xi) = \lambda_1$. $\Delta \to \Xi$ er den øverste sekvent i $\mathfrak{B}'_{\to}$ med højde mindre end l, hvilket også må gælde for $\Delta \to \alpha, \Xi$. De øvre sekventer i snittet Sn''_1 har derfor højden l. Det må gælde, at $\lambda_1 = \omega_{l-m}(\kappa_1)$, hvor κ_1 er den naturlige sum af ordinaltallene for de to øvre sekventer i Sn''_1.

Ifølge det førnævnte induktionsresultat er $\kappa_1 < \kappa$, hvorfor $\lambda_1 < \omega_{l-m}(\kappa)$.

Ved tilsvarende argumenter for $\mathfrak{B}''_{\to,2}$ fås, at $\lambda_2 < \omega_{l-m}(\kappa)$.

$\omega_{l-m}(\kappa)$ betegner et ordinaltal, der kun består af ,t led i sin normalform, nemlig leddet ω^{μ_1}, hvor μ_1 er $\omega_{l-m-1}(\kappa)$. Når $\lambda_1 < \omega_{l-m}(\kappa)$, vil det gælde om λ_1's normalform $\omega^{\mu_1} + \cdots + \omega^{\mu_n}$, at $\mu_1 \ < \ l - m - 1$. Hvis det gælder, at både $\lambda_1 < \omega_{l-m}(\kappa)$ og $\lambda_2 < \omega_{l-m}(\kappa)$, vil $\lambda_1 \# \lambda_2 < \omega_{l-m}(\kappa)$ gælde, da normalformen af $\lambda_1 \# \lambda_2$ ikke indeholder ordinaltal af højere 'potens' end den højeste i λ_1 og λ_2.

Ordinaltallet

$$\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\kappa}}}}}$$

kan udtrykkes som

$$\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\kappa}}}}}}}}},$$

hvor

$$\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}$$

betegner $(m-k)$ gange og

$$\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\kappa}}}}$$

betegner $(l-m)$ gange. Der bliver opløftet med ω først $(m-k)$ og derefter $(l-m)$ gange, alt ialt $(m-k+l-m)$, dvs. $(l-k)$ gange.

Det kan nu sluttes af følgende fire argumenter, at $\lambda' < \lambda$:

- Da $\lambda_1 < \omega_{l-m}(\kappa)$ og $\lambda_2 < \omega_{l-m}(\kappa)$ er $\lambda_1 \# \lambda_2 < \omega_{l-m}(\kappa)$.
- $\omega_{m-k}(\omega_{l-m}(\kappa))$ må være det samme som $\omega_{m-k+l-m}(\kappa)$, dvs. $\omega_{l-k}(\kappa)$.
- Da $\lambda_1 \# \lambda_2 < \omega_{l-m}(\kappa)$ må $\omega_{m-k}(\lambda_1 \# \lambda_2) < \omega_{m-k}(\omega_{l-m}(\kappa))$, dvs. $\omega_{m-k}(\lambda_1 \# \lambda_2) < \omega_{l-k}(\kappa)$.
- $\omega_{m-k}(\lambda_1 \# \lambda_2)$ er λ' og $\omega_{l-k}(\kappa)$ er λ. Det følger, at $\lambda' < \lambda$.

Da slutningerne mellem $\Delta, \Delta \to \Xi, \Xi$ og $\Delta \to \Xi$ i $\mathfrak{B}''_{\to}$ kun er kontraktioner, vil disse ikke ændre på ordinaltallet. Da de to beviser er identiske under $\Delta \to \Xi$, fås ud fra lemma 4.4.3, at $o(\mathfrak{B}''_{\to}) < o(\mathfrak{B}'_{\to})$. Det er hermed vist, hvordan den essentielle reduktion foretages, hvis snitformlen for det passende snit har formen $\alpha \wedge \beta$.

Reduktioner på de logiske symboler, der også har to øvre sekventer i enten venstre eller højre slutningsregel, er identiske med den her gennemgåede. For de resterende logiske symboler er reduktionen en smule simplere, men kører efter samme princip, hvorfor en sådan ikke gennemgås.[7]

Det essentielt reducerede bevis $\mathfrak{B}''_{\to}$ er et bevis for den tomme sekvent, og derfor kan de forberedende skridt og efterfølgende essentielle reduktioner udøves på $\mathfrak{B}''_{\to}$ selv. Denne procedure kan fortsættes uden nogensinde at terminere. Tildelingen af ordinaltal til beviser er defineret, så alle beviser får tildelt ordinaltal mindre end ε_0. Det nye bevis har altid et mindre ordinaltal end det foregående, hvilket er i modstrid med, at enhver nedadstigende kæde af ordinaltal begyndende med et ordinaltal mindre end ε_0 vil terminere.

4.8 Konsistens af PA

Vi kan hermed vise følgende sætning:

4.8.1 Sætning. **PA** er konsistent.

Bevis. Vi laver et modstridsargument. Antag, at **PA** er inkonsistent. Der må derfor findes et bevis i **PA** for den tomme sekvent. Foretag de forberedende skridt på dette bevis. Afslutningen af beviset vil dermed ikke indeholde induktioner, logiske initialsekventer eller udtyndinger. Det kan vises, at afslutningen af beviset ikke er hele beviset selv, og at der derfor må være et passende snit i afslutningen. Da der er et passende snit i afslutningen, kan vi med en essentiel reduktion skabe et nyt bevis for den tomme sekvent. Dette nye bevis har et lavere ordinaltal end det oprindelige og indeholder, efter samme argumentation som lige gennemgået, et passende snit i sin afslutning. En essentiel reduktion kan nu udføres på det nye bevis, hvorved der fremkommer et nyt bevis for den tomme sekvent med et endnu mindre ordinaltal. Denne proces fortsætter uden at terminere.

Ordinaltalstildelingen for beviser i **PA** er defineret så ordinaltallet for et bevis altid er mindre end ε_0. Vi har derfor i det foregående afsnit skabt en nedadstigende følge af ordinaltal, startende med et ordinaltal mindre end ε_0, der ikke terminerer. Dette er i modstrid med, at vi i afsnit 4.3 har overbevist os om, at enhver nedadstigende kæde af ordinaltal, der begynder med et ordinaltal mindre end ε_0, vil terminere. Det følger hermed, at **PA** er konsistent. ∎

[7] Se [Takeuti, 1987; p. 113] for en gennemgang af tilfældet med $\forall$-kvantoren.

Kapitel 5

Bevisteoriens udvikling efter fremsættelsen af Hilberts program

Hilbert søger gennem sit program absolutte, formaliserede konsistensbeviser for systemer mindst indeholdende **PA**, som kun må indeholde et endeligt antal slutninger på et endeligt antal symboler. Beviset skal have en endelig længde, dvs. i princippet kunne skrives ned inden for en endelig tid. Det system, der afspejler Hilberts krav til konsistensbeviser kaldes for Hilberts finitisme (**HF**), der, som nævnt i kapitel 1 og 4, kan sidestilles med **PRA**. **HF** er svagere end **PA**, da **PA** giver mulighed for, at kvantorer løber over hele domænet af naturlige tal, hvilket ikke kan udtrykkes i **HF**. Inden for **HF** må enhver kvantor kun løbe over en endelig delmængde af $\mathbb{N}$. GÖdels ufuldstændighedssætning $GÖd_2$ viser, at Hilberts program er en utopi, idet man til et konsistensbevis af et system mindst indeholdende **PA** skal benytte begreber (prædikater), der ikke lader sig formalisere inden for systemet selv.

Få år efter $GÖd_2$ fremsætter Gentzen sit konsistensbevis for **PA**. Da et absolut, formaliseret konsistensbevis ikke er muligt, må det klarlægges hvilke begreber uden for **PA**, der bruges i beviset og derefter godtgøres, at begreberne ikke er problematiske. Dette gøres ved at undersøge, om der kun bruges konstruktive begreber. Gentzen formulerer ikke selv eksplicit dette krav, men det er tydeligvis hans mening. Gaisi Takeuti kalder dette Hilbert-Gentzens finitistiske udgangspunkt (**HGF**) og kalder det en naturlig udvidelse af **HF**.[1] Et konsistensbevis i overenstemmelse med Hilbert-Gentzen finitismen udføres efter punkterne:

1. Konstru,r en passende ordning af de konstruktive ordinaltal under ε_0.

2. Redegør med **HGF** for, at det er en velordning.

3. Brug herudover kun redskaber inden for **HF** i konsistensbeviset.

Det er i punkt 2, at Gentzens konsistensbevis kommer uden for **PA** selv. Helt specifikt er det eliminatorerne, der viser velordningen og dermed sikrer, at enhver nedadstigende følge startende med et ordinaltal under ε_0 vil terminere. Det følger af $GÖd_2$, at da vi kan bevise **PA**'s konsistens ved induktion over ordinaltallene, kan velordningen af disse ikke formaliseres i **PA**. Vi har i kapitel 4 konstruktivt gjort rede for, at enhver nedadstigende følge startende med et ordinaltal under ε_0 vil terminere, hvilket gør beviset pålideligt. Bevisets gyldighed er dog stadigvæk et spørgsmål om, hvorvidt man vil godtage den uformelle argumentation for dette.

Paul Bernays, der i mange år arbejdede sammen med Hilbert, opsummerer i 1967:

[1] [Takeuti, 1987; p. 101].

»It has thus become apparent, that the "finite Standpunkt" is not the only alternative to classical ways of reasoning and is not necessarily impliedby the idea of proof theory. An enlarging of the methods of proof theory was therefore suggested: Instead of a reduction to finitist methods of reasoning,it was required only that the arguments be of a constructive character, allowing us to deal with more general forms of inferences.« [FEFERMAN, 1988; p. 365].

Solomon Feferman mener, at beviset givet i [TAKEUTI, 1987] for Gentzens bevis flere steder er uklart omkring eliminatorerne, det nævnes dog ikke hvor. Kravet om brug af konstruktive metoder er for løst til at danne grundlaget for en udvidelse af Hilberts program, da det ikke er muligt præcist at definere, hvad en konstruktiv metode er.

I stedet mener Feferman, at der er brug for en yderligere præcisering af programmet. Fremgangsmåden i det Feferman kalder **reduktionel bevisteori** er, at man har en del af matematikken, udtrykt i et formelt system $\mathbf{S}_2$, hvis konsistens kan sikres inden for begrebsrammen $\mathfrak{S}_2$. Med bevisteorien reduceres $\mathbf{S}_2$ til et nyt system $\mathbf{S}_1$, der kan sikres inden for rammerne af $\mathfrak{S}_1$, hvor $\mathfrak{S}_1$ er mere elementært end $\mathfrak{S}_2$.

Givet systemet $\mathbf{S}_2$ skal $\mathbf{S}_1$ konstrueres, så $\mathbf{S}_2$ er en konservativ udvidelse af $\mathbf{S}_1$ for en mængde formler Θ, og det gælder for alle formler α i Θ, at $\vdash_{\mathbf{S_1}} \alpha$ medfører $\vdash_{\mathbf{S_2}} \alpha$. Herudover skal det gælde, at det i $\mathbf{S_1}$ kan udledes, at $kon_{\mathbf{S_1}} \Rightarrow kon_{\mathbf{S_2}}$. Problemet om konsistensen af $\mathbf{S}_2$ vil nu være udtrykt i $\mathbf{S}_1$ og derfor inden for begrebsrammen $\mathfrak{S}_1$.

Disse reduktioner sker i spring. Man kan med det reduktive program prøve at reducere en uendelig begrebsramme til en endelig, en ikke-tællelig uendelighed til en tællelig uendelighed, en ikke-konstruktiv til en konstruktiv.[2] Fefermans reduktive program består derfor af et hieraki af Hilbert-programmer.[3] For et konsistensbevis af eksempelvis analysen vil Fefermans begrebsramme i sin yderste konsekvens indeholde hele prædikatlogikken og derudover tillade mængden af de naturlige tal, dvs. en aktuel uendelighed, hvilket er en kraftig udvidelse af **HF**.[4]

Stephen G. Simpson har som sit formål at undersøge, hvor langt man kan nå med **HF** ved konservative udvidelser. Han opstiller et system $\mathbf{WKL}_0$ (Weak KÖnig Lemma), der er svagere end analysen, men kan udtrykke en del af denne. Det logiske grundlag er fuld 2. ordens logik, hvilket bla. betyder, at kvantorer kan løbe over alle delmængder af de naturlige tal. Systemet har to indskrænkninger i forhold til den almene analyse:

- Induktion tillades kun over formler på formen $\exists x\alpha$, hvor α ikke indeholder ubegrænsede kvantorer og $\exists$ er en 1. ordens kvantor.
- I stedet for udvalgsaksiomet, bruges et begrænset KÖnigs lemma.[5]

Simpson viser, at for en bestemt mængde af formler i $\mathbf{WKL}_0$, er $\mathbf{WKL}_0$ konservativ over **HF**.[6] Resultatet begrænser sig dog til formler på formen $\forall x\exists y\alpha$, $\forall x\alpha$, $\exists x\alpha$ og α, hvor α ikke indeholder ubegrænsede kvantorer og $\forall, \exists$ er af 1. orden.

[2] Feferman nævner flere, der dog ikke har interesse her.
[3] Først forslået af Kreisel i 1958 [FEFERMAN, 1988; p. 367].
[4] [SIMPSON, 1988; p. 352].
[5] Selve begrænsningen er gennemgået i [SIMPSON, 1988; p. 353].
[6] Wilfried Sieg har vist resultatet i Gentzen-stil [SIMPSON, 1988; p. 353].

Simpson konkluderer:

≫Any mathematical theorem which can be proved in WKL_0 is finitistically reducible in the sense of Hilbert's program. In particular, any Π^0_2 consequence of such a theorem is finitistically true.≪ [Simpson, 1988; p. 354].

Her svarer Π^0_2 til vores ovennævnte mængde af formler. Både Fefermans og Simpsons arbejder viser, at bevisteorien, som Hilbert fremsatte den i sit program, ikke er uden aktualitet, og derfor har en funktion både i sin oprindelige form og som inspiration for udvikling af nye 'programmer'.

Afrunding

Bevisteorien er således et område inden for matematikken under stadig udvikling. Området forekommer umiddelbart begrænset, da man primært beskæftiger sig med konsistensbeviser for systemer af forskellig kompleksitet, da beviser for syntaktisk fuldstændighed (af systemer indeholdende **PRA**) er udelukket efter GÖdels 1. ufuldstændighedssætning. Men til trods for dette er bevisteorien et vigtigt redskab, da den sætter fokus på styrker og svagheder ved den formelle matematiske metode. Gennem en formalisering præciseres de objekter, der undersøges, hvorfor den formelle metode kan skabe nøjagtige resultater. Ved en formalisering af eksempelvis prædikatlogikken (i et 1. ordens sprog) klarlægges begreberne beviselighed og sandhed ned til mindste detalje med en præcision, der ikke opnås ved andre metoder. Den store svaghed ved den formelle metode har GÖdel påpeget; i det øjeblik et system formaliseres, kan man ikke inden for systemets formalisme bevise systemets konsistens.

Netop på grund af den formelle metodes begrænsninger, er det vigtigt at diskutere matematikkens grundlag, og her har bevisteorien sin plads. Man bør være klar over, hvor stort et arbejde og hvor grundlæggende overvejelser der kræves, før konsistensen af et system så intuitivt indlysende som de naturlige tals teori kan bevises (u)formelt.

Appendiks A

Peanos aksiomer

Peano fremsatte i 1889 fem postulater til karakterisering af de naturlige tal.[1]

1. 0 er et naturligt tal.
2. Hvis n er et naturligt tal, er n' et naturligt tal. (Her betegner n' successoren til n.)
3. Hvis der for to naturlige tal n og m gælder, at $n' = m'$, så vil $n = m$. (Dette sikrer, at successorfunktionen er injektiv.)
4. For ethvert naturligt tal n er $n' \neq 0$. (Det naturlige tal 0 er ikke efterfølger for noget andet naturligt tal.)
5. Antag, at 0 har egenskaben P. Hvis det, at n har egenskaben P, medfører, at n' har egenskaben P, så vil alle naturlige tal have egenskaben P. (Dette kaldes matematisk induktion. Af dette postulat følger, at 1 og 2 genererer **alle** naturlige tal.)

I den moderne udgave af postulaterne betegnes de Peanos aksiomer, hvor en definition af addition og multiplikation desuden medtages. Her formuleres de i et 1. ordens logisk sprog, hvor S er successorfunktionen. Definitionen af 0 som et naturligt tal er på forhånd givet.[2]

I $\forall x_1(Sx_1 \neq 0)$.

II $\forall x_1 \forall x_2(Sx_1 = Sx_2 \Rightarrow x_1 = x_2)$.

III $\forall x_1(x_1 + 0 = x_1)$.

IV $\forall x_1 \forall x_2 \, (x_1 + Sx_2 = S(x_1 + x_2))$.

V $\forall x_1(x_1 \cdot 0 = 0)$.

VI $\forall x_1 \forall x_2(x_1 \cdot Sx_2 = (x_1 \cdot x_2) + x_1)$.

VII $\forall x_2 \ldots \forall x_k \, (\alpha(0) \Rightarrow (\forall x_1 \, ((\alpha(x_1) \Rightarrow \alpha(Sx_1)) \Rightarrow \forall x_1 \alpha))$.

---

[1] [Kleene, 1952; p. 20].

[2] [Bell & Machover, 1977; pp. 340].

Appendiks B

Von Neumann repræsentationen af ordinaltallene

Nogle læsere vil måske studse over ordinaltals-repræsentationen i denne rapport. Den gængse repræsentation, formuleret inden for den generelle mængdelære, ser noget anderledes ud. Til denne repræsentation, som kaldes von Neumann repræsentationen, stilles alle Zermelo-Fraenkels aksiomer samt udvalgsaksiomet til rådighed. Under vores bevis af **PA**'s konsistens ønsker vi naturligvis at medtage så lidt som muligt, der ikke kan formaliseres inden for **PA**, hvorfor vi ikke har **ZFAC**[1] til vores rådighed. Ydermere ønsker vi kommutativitet af operationen $+$, hvilket ikke sker inden for von Neumann repræsentationen; derfor indførte vi den særlige naturlige sum '#' i kapitel 4.

Vi vil i det følgende give en kort præsentation af von Neumann repræsentationen, under antagelse af **ZFAC** formuleret i et 1. ordens sprog svarende til det i kapitel 2 definerede sprog. Nu indeholder $\mathcal{L}_1$ yderligere det ikke-logiske symbol $\in$. Først nogle definitioner.

B.0.2 Definition.

$$\begin{aligned} (a)\quad Ev(x) \quad &\Leftrightarrow_D \forall y \in x, \forall z \in x (y = z \vee y \in z \vee z \in y) \\ &\quad \wedge \forall u \subseteq x (u \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in u, \forall z \in u (z \notin y)). \end{aligned}$$

$$(b)\quad Trans(x) \Leftrightarrow_D \forall y \in x (y \subseteq x).$$

□

Del (a) af definitionen kaldes 'epsilon velordner x', da første del af konjuktionen kræver, at alle elementer i x kan sammenlignes. Anden del af konjuktionen kræver, at enhver delmængde af x, som ikke er den tomme mængde, har et 'mindste' element. Del (b) af definitionen kræver, at ethvert element i x også er en delmængde af x.

[1]**ZFAC** er en forkortelse af Zermelo-Fraenkels aksiomer plus udvalgsaksiomet. **ZFAC** indeholder derfor følgende: 1) Ekstensionalitetsaksiomet 2) Parmængdeaksiomet 3) Udskiftningsaksiomet 4) Potensmængdeaksiomet 5) Unionsmængdeaksiomet 6) Uendelighedsaksiomet 7) Udvalgsaksiomet. For en grundig aksiomatisering af mængdelæren og gennemgang af denne se enten [Moschovakis, 1994] eller [Bell & Machover, 1977].

Vi kan nu definere, hvad det vil sige, at x er et ordinaltal.

B.0.3 Definition. Lad O_n være klassen af alle ordinaltal. Da siger vi, at

$$x \in O_n \Leftrightarrow_D Trans(x) \land Ev(x),$$

□

Tolker vi tallet 0 som den tomme mængde $\emptyset$, 1 som mængden af den tomme mængde $\{\emptyset\}$, 2 som mængden af den tomme mængde og mængden af den tomme mængde $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ser vi, at disse er eksempler på ordinaltal.[2]

Efter at have defineret tallene 0, 1 og 2, kan vi rekursivt definere det $(n+1)$'te tal ved $n+1 = n \cup \{n\}$. Det følger heraf, at de naturlige tal er ordinaltal (vises let ved induktion). Er x et naturligt tal, skriver vi dette som $Int(x)$.[3]

Klassen af alle ordinaltal O_n indeholder dog mange flere tal end blot de naturlige tal. O_n kan deles op i to disjunkte delklasser: Efterfølgertallene og limes-tallene. Dette samt den foregående paragraf lægger op til følgende formelle definitioner

B.0.4 Definition.

(c) $x + 1 =_D x \cup \{x\}$.

(d) $Suc(x) \Leftrightarrow_D x \in O_n \land \exists y(x = y + 1 \lor x = 0)$.

(e) $Lim(x) \Leftrightarrow_D x \in O_n \land \neg Suc(x)$.

(f) $Int(x) \Leftrightarrow_D Suc(x) \land \forall y(y \in x \Rightarrow Suc(y))$.

(g) $\omega =_D \{x \mid Int(x)\}$.

□

B.0.5 Eksempel. Definitionen af $Suc(x)$ skulle være umiddelbart forståelig. x er en 'successor', hviss x har en forgænger eller x er 0. At 0 derved er en 'successor', kan dog virke lidt underligt, men det fornuftige i definitionen ses i forhold til limes-tallene. Et limes-tal er et tal, som ikke er en successor. $\omega = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ er således et limes-tal, da det ikke er 0, og da der ikke findes en umiddelbar forgænger til ω. Definerer vi relationen x mindre end y som: $x < y \Leftrightarrow_D x \in y$, ser vi, at er et tal x mindre end et tal y, da er x indeholdt i y og derfor, som en følge af transitiviteten, er x en delmængde af y. Eksempelvis er 16 på denne måde indeholdt i 17.

Vi ser nu det fornuftige i definition B.0.4 (f), da netop de naturlige tal opfylder $Int(x)$. ω opfylder ikke B.0.4 (f), da ω er et limes-tal. Men hvad med $\omega + 1$, der jo opfylder (d), og derfor er et efterfølgertal? $\omega + 1$ er ikke et heltal, da det ikke opfylder anden del af konjuktionen i B.0.4 (f); for $\omega \in \omega + 1$ og ω er jo et limes-tal. □

Regneoperationerne '+' og '·'

Vi indfører nu regneoperationen '+' for alle $x \in O_n$, hvor $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda \in O_n$:

B.0.6 Definition.

(h) $\alpha + 0 = \alpha$.

(i) $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$.

[2]Dette er begyndelsen af von Neumann repræsentationen, der netop relaterer tal og mængder.

[3]Betegnelsen $Int(x)$ er taget fra engelsk, hvor det menes, at x er en 'integer' — et heltal. Vi har valgt at bibeholde denne betegnelse.

(j) $\alpha + \lambda = \bigcup_{\delta\in\lambda} \alpha + \delta$, hvis $Lim(\lambda)$.

□

Denne regneoperation er ikke generelt kommutativ. Operationen er dog kommutativ for alle ordinaltal, der opfylder B.0.4 (f). Dette svarer meget godt overens med, at den normale plus-operation, som vi kender den fra **PA**, er kommutativ. Kommutativiteten for $Int(x)$ følger af (c) og (i); eksempelvis er $2+3 = 2+(2+1) = 2+((1+1)+1) = ((2+1)+1)+1 = 5$, hvor det samtidigt gælder, at $3+2 = 3+(1+1) = (3+1)+1 = 5$. Operationen '+' er, som vi vil se i det kommende eksempel, netop ikke kommutativ med hensyn til limes-tallene.

B.0.7 Eksempel. $1 + \omega \neq \omega + 1$.

$$\begin{aligned} 1+\omega &= \bigcup_{\delta\in\omega} 1+\delta \\ &= (1+0)\cup(1+1)\cup(1+2)\cup\dots\cup(1+n)\cup\dots \\ &= 1\cup 2\cup 3\cup\dots\cup(n+1)\cup\dots \\ &= \{0\}\cup\{0,1\}\cup\{0,1,2\}\cup\dots\cup\{0,1,2,\dots,n\}\cup\dots \\ &= \omega. \end{aligned}$$

Hvorimod

$$\begin{aligned} \omega+1 &= \omega\cup\{\omega\} \\ &= \{0,1,2,\dots\}\cup\{\{0,1,2,\dots\}\} \\ &= \{0,1,2,\dots,\{0,1,2,\dots\}\} \\ &\neq \omega. \end{aligned}$$

□

Ligesom vi ovenfor har indført operationen '+' for ordinaltallene, vil vi også indføre operationen '·'.

B.0.8 Definition.

(k) $\alpha \cdot 0 = 0$,

(l) $\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha$,

(m) $\alpha \cdot \lambda = \bigcup_{\delta\in\lambda} \alpha \cdot \delta$, hvis $Lim(\lambda)$. □

Operationen '·' er, ligesom '+', associativ men ikke kommutativ. Det sidste vises let, som under '+', ved et modeksempel — eksempelvis gælder det, at $\omega \cdot 2 = \omega + \omega$, hvorimod $2 \cdot \omega = \omega$.

Transfinit induktion over $\mathbf{O_n}$

En generaliseret udgave af den velkendte induktion over de naturlige tal er den transfinite induktion over O_n. Transfinit induktion over O_n består af tre skridt:

Lad $X \subseteq O_n$ være en klasse. Da gælder det, at

1. $0 \in X$.
2. $x \in X \Rightarrow x + 1 \in X$.
3. $Lim(\lambda)$ og $\delta \in X$ når $\delta \in \lambda \Rightarrow \lambda \in X$.

Så er $X = O_n$.

En yderligere klassedeling

Alle ordinaltallene fra de ovenstående eksempler, f. eks. $\omega+1$, er tællelige. Med tællelige mængder, mener vi mængder med en endelig kardinalitet eller med kardinaliteten[4] $\aleph_0$. Men der findes også ikke-tællelige ordinaltal. Under antagelse af **ZFAC** kan Hartogs sætning, der sikrer eksistensen af en kæde af velordnede mængder med en voksende kardinalitet, vises. Kort fortalt siger Hartogs sætning, at der findes en funktion χ, der til en mængde A tilordner $\chi(A)$, hvor $\chi(A)$ er den mindste velordnede mængde større end A.[5] Antager vi nu yderligere den generelle kontinuum hypotese **GCH** som et aksiom, indfanger vores teori de uendelige kardinaltal efter følgende rekursion:

$$(i)\ \aleph_0 = |\mathbb{N}| \quad (ii)\ \aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}.$$

Givet Hartogs sætning og **GCH** eksisterer der således ikke-tællelige ordinaltal. Det mindste af disse kalder vi ω_1, der har kardinaltallet $\aleph_1$. $\aleph_1$ kaldes også $\mathfrak{c}$.

For at skelne mellem de forskellige typer af ordinaltal inddeler vi ordinaltallene i forskellige klasser:

1. **Første klasse**: Klassen indeholder ordinaltallene med en endelig kardinalitet, dvs. de tal, der opfylder $Int(x)$.
2. **Anden klasse**: Denne klasse indeholder ordinaltallene med kardinaliteten $\aleph_0$. Det mindste tal i denne klasse er ω.
3. **Tredje klasse**: Denne klasse indeholder ordinaltallene med kardinaliteten $\aleph_1$. Her er, som nævnt ovenfor, ω_1 det mindste ordinaltal.
4. osv.

[4] I resten af dette appendiks forudsætter vi, at læseren har et vist kendskab til begrebet kardinalitet. Generelt siger vi, at to mængder A og B er ækvipotente, eller har samme kardinalitet, hviss der eksisterer en bijektion mellem A og B. En mængdes kardinalitet kan løst sagt identificeres med antallet af elementer i mængden. Denne tolkning giver dog anledning til visse kvaler, når der er tale om uendelige mængder. I det tilfælde, hvor mængden er mængden af de naturlige tal, definerer vi kardinaliteten af $\mathbb{N}$, $|\mathbb{N}|$, til at være $\aleph_0$ og kardinaliteten af de reelle tal $|\mathbb{R}|$ til $\aleph_1$.

[5] For et bevis af Hartogs sætning se [Moschovakis, 1994; p. 106].

Appendiks C

Primitiv rekursiv aritmetik

Primitiv rekursiv aritmetik (PRA) er karakteriseret ved følgende formalisme:

(a) Det basale logiske system er den udsagnslogiske kalkyle.[1].

(b) De definerende ligninger for primitive rekursive funktioner antages som aksiomer. De primitive rekursive funktioner er opnået ved rekursion ud fra nogle initialfunktioner, som definerer nulfunktion, efterfølgerfunktion samt projektion. De opnåede funktioner er sammensætning og rekursion. Se i øvrigt definition 3.2.1.

(c) Ingen kvantorer introduceres.

(d) Matematisk induktion for kvantorfrie formler medtages i form af reglen *Ind*:

$$\frac{\alpha(a), \Gamma \to \Delta, \alpha(Sa)}{\alpha(0), \Gamma \to \Delta, \alpha(s)}$$

Se definition 3.1.2 for yderligere forklaring af *Ind*.

[1]Se evt. [Bell & Machover, 1977; pp. 20]

Litteratur

[1] Barwise, J. (ed.)
[1977] *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

[2] Bell, J.L. & Machover, M.
[1977] *A Course In Mathematical Logic*, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam.

[3] Cole, F.N., et al. (eds.)
[1902] *Bulletin of the American Mathematical Society*, The Macmillan Company, New York.

[4] Feferman, S. (ed.)
[1986] *Kurt GÖdel - Collected Works*, vol.1, Oxford University Press, New York.
[1988] *Hilbert's program relativized: Proof-theoretical and foundational reductions*, The Journal of Symbolic Logic, vol. **53**, nr. **2**, pp. 364.

[5] Gentzen, G.
[1935] *Investigations into Logical Deduction*, engelsk oversættelse fra [Szabo, M.E., 1969; pp. 68].
[1938] *New Version of the Consistency Proof for Elementary Number Theory*, engelsk oversættelse fra [Szabo, M.E., 1969; pp. 252].

[6] GÖdel, K.
[1931] *On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems I*, engelsk oversættelse fra [Feferman, S., 1986; pp. 195].

[7] Hilbert, D.
[1902] *Mathematical Problems*, engelsk oversættelse fra [Cole, F.N., et al., 1902; pp. 437].
[1925] *On the infinite*, engelsk oversættelse fra [van Heijenoort, J., 1977; pp. 367].
[1927] *The foundations of mathematics*, engelsk oversættelse fra [van Heijenoort, J., 1977; pp. 464].

[8] Kleene, S.C.
[1952] *Introduction to Metamathematics*, Wolters-Noordhoffs Publishing And North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
[1986] *Introductory note to 1930b, 1931 and 1932b*, fra [Feferman, S., 1986; pp. 126]

[9] Moschovakis, Y.N.
[1994] *Notes on Set Theory*, Springer-Verlag, New York.

[10] Smorynski, C.
[1977] *The Incompleteness Theorems*, fra [Barwise, J., 1977; pp. 821].

[11] SIEG, W.
[1988] *Hilbert's program sixty years later*, The Journal of Symbolic Logic, vol. **53**, nr. **2**, pp. 338.

[12] SIMPSON, S.G.
[1988] *Partial realizations og Hilbert's program*, The Journal of Symbolic Logic, vol. **53**, nr. **2**, pp. 349.

[13] SZABO, M.E.
[1969] *The Collected Papers Of Gerhard Gentzen*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

[14] TAKEUTI, G.
[1987] *Proof Theory*, 2. ed., North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

[15] VAN HEIJENOORT, J.
[1977] *From Frege to GÖdel: a source book in mathematical logic 1879 - 1931*, Harvard University Press.

Supplerende litteratur

[16] DAVIS, P.J. & HERSH, R.
[1981] *The Mathematical Experience*, Penguin Books, Boston.

[17] DETLEFSEN, M.
[1986] *Hilbert's Program: an essay on mathematical instrumentalism*, Synthese, Dordrecht.

[18] KLEENE, S.C.
[1967] *Mathematical Logic*, John Wiley & Sons, Inc., New York.

[19] MANIN, Y.I.
[1984] *A Course in Mathematical Logic*, Springer-Verlag, New York.

[20] MOSTOWSKI, A.
[1966] *Thirty Years Of Foundational Studies*, Oxford , Basil Blackwell, Helsinki.

[21] REID, C.
[1972] *Hilbert*, Springer-Verlag, New York.

[22] SKOVSMOSE, O.
[1990] *Ud over matematikken*, Systime, Viborg.